

## 2.4 Wölbtorsion

### 2.4.1 Offene Querschnitte

Wird die Funktion des Verdrehwinkels keiner Einschränkung ( $\varphi''(z) = 0$ ) unterworfen, dann existiert als einzige Dehnung  $\varepsilon_{zz}$  (s. (3.12)):

$$\varepsilon_{zz} = v_z' = v_{z0}' - \varphi'' (y_D x - x_D y + \omega)$$

Man erhält damit die einzige nicht verschwindende Normalspannung:

$$\sigma_{\omega} = \sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} = E \left[ v_{z0}' - \varphi'' (y_D x - x_D y + \omega) \right] \quad . \quad \text{Wölbnormalspannung} \quad (3.37)$$

Erfolgt die Belastung ausschließlich durch ein Torsionsmoment, dann verschwinden die mit  $\sigma_{zz}$  formulierten Schnittgrößen. Demzufolge gilt (s. (1.9)):

$$F_L = \int_{(A)} \sigma_{zz} dA = 0 \quad M_{bx} = \int_{(A)} \sigma_{zz} y dA = 0 \quad -M_{by} = \int_{(A)} \sigma_{zz} x dA = 0 \quad .$$

Mit  $\sigma_{zz}$  aus (3.37) wird daraus:

$$\begin{aligned} 0 &= v_{z0}' \int_{(A)} dA - \varphi'' \left( y_D \int_{(A)} x dA - x_D \int_{(A)} y dA + \int_{(A)} \omega dA \right) \\ 0 &= v_{z0}' \int_{(A)} x dA - \varphi'' \left( y_D \int_{(A)} x^2 dA - x_D \int_{(A)} x y dA + \int_{(A)} x \omega dA \right) \\ 0 &= v_{z0}' \int_{(A)} y dA - \varphi'' \left( y_D \int_{(A)} x y dA - x_D \int_{(A)} y^2 dA + \int_{(A)} y \omega dA \right) \quad . \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit:

|  |  |                                       |
|--|--|---------------------------------------|
| $A = \int_{(A)} dA$                    |  | Flächeninhalt                         |
| $S_y = \int_{(A)} x dA$                | $S_x = \int_{(A)} y dA$                | statische Momente der Fläche          |
| $I_{xx} = \int_{(A)} y^2 dA$           | $I_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA$           | Flächenmomente 2. Ordnung             |
| $I_{xy} = - \int_{(A)} x y dA$         |  |                                       |
| $S_{\omega} = \int_{(A)} \omega dA$    |  | <b>sektorielles statisches Moment</b> |
| $I_{x\omega} = \int_{(A)} x \omega dA$ | $I_{y\omega} = \int_{(A)} y \omega dA$ | <b>Sektorzentrifugalmomente</b>       |

(3.38)  
(3.39)

und den speziellen Werten für ein Schwerpunkts-Koordinatensystem

$$S_x = S_y = S_{\omega} = 0$$

kürzer geschrieben werden:

$$0 = v_{z0}' A$$

$$0 = \varphi'' (I_{x0} + y_D I_{yy} + x_D I_{xy})$$

$$0 = \varphi'' (I_{y0} - y_D I_{xy} - x_D I_{xx})$$

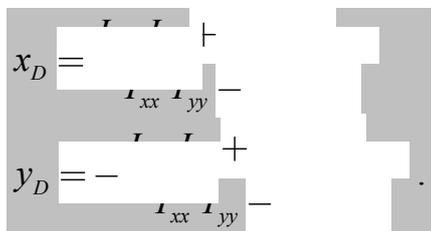
Aus der ersten Gleichung folgt (wie erwartet):

$$v_{z0} =$$

Die anderen beiden Gleichungen sind dann erfüllt für:

$$\varphi' = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \text{konst.} \quad \text{d.h. reine Torsion}$$

bzw.:



$$(3.40)$$

Damit steht neben (3.5) ein weiterer Gleichungssatz zur Bestimmung des Schubmittelpunktes  $M$  - des sich bei fehlender Fixierung des Drehpunktes  $D$  frei einstellenden Punktes - zur Verfügung. An Hand der konkreten Aufgabenstellung ist daher zu entscheiden, welcher Formelsatz die gewünschten Koordinaten effektiver liefert.

Für die Wölbnormalspannung (3.37) gilt mit (3.17):

$$\sigma_{\omega} = -E \varphi'' \omega_M \quad (3.41)$$

Mit  $\sigma_{\omega}$  und  $\omega_M$  wird eine weitere Schnittgröße, das so genannte **Bimoment  $B$**  formuliert:

$$B(z) = \int_{(A)} \sigma_{\omega} \omega_M dA = -E \varphi'' \int_{(A)} \omega_M^2 dA = -E \varphi'' I_{\omega\omega_M} \quad (3.42)$$

mit:

$$I_{\omega\omega_M} = \int_{(A)} \omega_M^2 dA \quad I_{\omega\omega_M} \text{ **Sektorträgheitsmoment (Wölbwiderstand)** } \quad (3.43)$$

Das Produkt  $E I_{\omega\omega_M}$  wird als **Wölbsteifigkeit** bezeichnet.

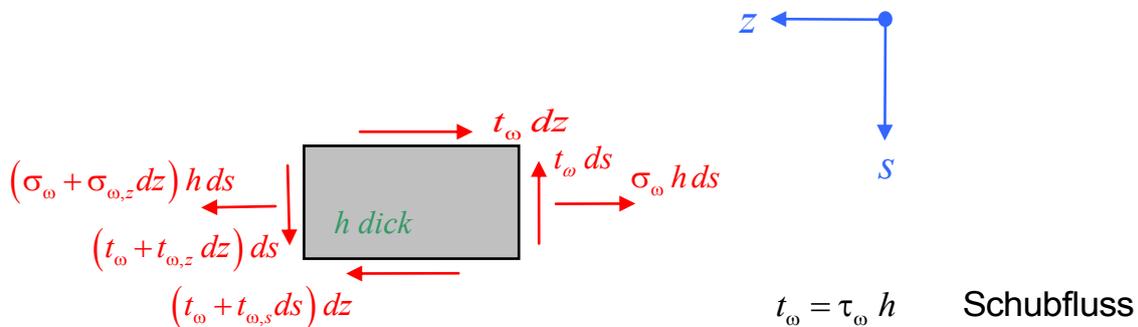
Mit dem Bimoment lautet die Wölbnormalspannung:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B}{I_{\omega\omega_M}} \omega_M \quad (3.44)$$

Beim *allgemeinen* Belastungszustand setzt sich damit die Normalspannung in Stablängsrichtung aus folgenden Anteilen zusammen (Beschreibung mit  $x$  und  $y$  als Hauptachsen – s. o.):

$$\sigma_{zz}(s, z) = \frac{F_L(z)}{A} + \frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} y(s) - \frac{M_{by}(z)}{I_{yy}} x(s) + \frac{B(z)}{I_{\omega\omega_M}} \omega_M(s) \quad (3.45)$$

Die Wölbnormalspannungen  $\sigma_\omega$  bedingen **sekundäre Schubspannungen**  $\tau_\omega$ , die zusätzlich zu den Schubspannungen der reinen Torsion  $\tau_{sv}$  (bisher  $\tau$ ) auftreten. Diese werden über ein Kräftegleichgewicht in Stablängsrichtung am Stabelement  $dV = ds dz h$  gewonnen:



$$\rightarrow: \cancel{t_\omega dz} - (\cancel{t_\omega} + t_{\omega,s} ds) dz + \cancel{\sigma_\omega h ds} - (\cancel{\sigma_\omega} + \sigma_{\omega,z} dz) h ds = 0$$

$$t_{\omega,s} + \sigma_{\omega,z} h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_\omega = - \int_{(s)} \sigma_{\omega,z} h ds$$

Mit  $\sigma_\omega$  nach Gleichung (3.41) wird daraus:

$$t_\omega(s, z) = E \varphi''' \int_0^s \omega_M(\bar{s}) h(\bar{s}) d\bar{s} + t_{\omega 0}(z) \quad (3.46)$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Randbedingung  $\tau_\omega(s=0, z) = 0$  zu null. Die Beziehung für die sekundäre Schubspannung lautet schließlich:

$$\tau_\omega(s, z) = \frac{E \varphi'''(z)}{h(s)} \int_0^s \omega_M(\bar{s}) h(\bar{s}) d\bar{s} \quad ,$$

oder:

$$\tau_\omega(s, z) = E \varphi'''(z) \frac{S_{\omega_M}(s)}{h(s)} \quad , \quad (3.47)$$

mit:

$$S_{\omega_M} = \int_0^s \omega_M(\bar{s}) h(\bar{s}) d\bar{s} \quad \text{sektorielles statisches Moment ( s. (3.38) )}$$

Das Torsionsmoment  $M_t$  wird als Summe aus dem der reinen Torsion  $M_{t_{sv}}$  und dem der Wölbtorsion  $M_{t_\omega}$  aufgefasst:

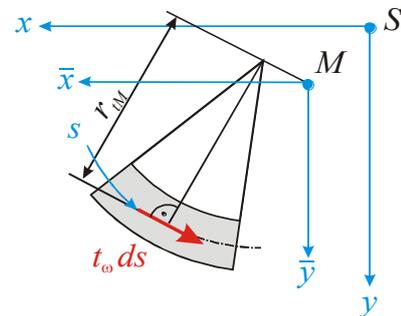
$$M_t(z) = M_{t_\omega}(z) + M_{t_{sv}} \quad (3.48)$$

Für  $M_{t_{sv}}$  gilt die bekannte Beziehung (3.22):

$$M_{t_{sv}} = G I_t \varphi' \quad (3.22)$$

$M_{t_\omega}$  ist im Gegensatz zu  $M_{t_{sv}}$  vom Bezugspunkt abhängig. Es folgt aus einer Äquivalenzbetrachtung für das Moment um die Stabachse (s. auch S. 102):

$$M_{t_\omega} = \int_0^l t_\omega r_{tM} ds$$



Mit  $t_\omega$  über Gleichung (3.46) wird daraus:

$$M_{t_\omega} = E \varphi''' \int_0^l \left[ \int_0^s \omega_M h d\bar{s} \right] r_{tM} ds$$

Unter Beachtung von  $r_{tM} ds = d\omega_M$  (s. (3.14)), führt eine partielle Integration über:

$$M_{t_\omega} = E \varphi''' \int_0^l \underbrace{1}_{u'} \left[ \int_0^s \omega_M h d\bar{s} \right] d\omega_M$$

vorerst auf:

$$M_{t_\omega} = E \varphi''' \left[ \omega_M \int_0^s \omega_M h d\bar{s} \Big|_{s=0}^{s=l} - \int_{(A)} \omega_M^2 dA \right]$$

Da

$$S_{\omega_M} = \int_0^l \omega_M h ds = \int_{(A)} \omega_M dA = 0$$

wird daraus mit dem Sektorträgheitsmoment  $I_{\omega\omega_M}$  (3.43):

$$M_{t_\omega} = -E I_{\omega\omega_M} \varphi''' \quad (3.49)$$

Diese Beziehung wird in die Gleichung für  $\tau_\omega(s, z)$  (3.47) eingesetzt:

$$\tau_\omega(s, z) = -\frac{M_{t_\omega}(z) S_{\omega_M}(s)}{I_{\omega\omega_M} h(s)} \quad (3.50)$$

Beim *allgemeinen* Belastungszustand setzt sich damit die Schubspannung tangential zur Profilmittellinie aus folgenden Anteilen zusammen (Beschreibung mit  $x$  und  $y$  als Hauptachsen – s. o.):

$$\tau_{sz}(s, z) = \tau_{sv}(s) - \frac{1}{h(s)} \left[ \frac{F_{Qy}(z)}{I_{xx}} S_{x0}(s) + \frac{F_{Qx}(z)}{I_{yy}} S_{y0}(s) + \frac{M_{t\omega}(z)}{I_{\omega\omega_M}} S_{\omega_M}(s) \right] . \quad (3.51)$$

Mit den bereitgestellten  $M_{t,sv}$  (3.22) und  $M_{t\omega}(z)$  (3.49) ergibt sich nach (3.49) die **Torsions-Dgl.** zu:

$$-EI_{\omega\omega_M} \varphi'''(z) + GI_t \varphi'(z) = M_t(z)$$

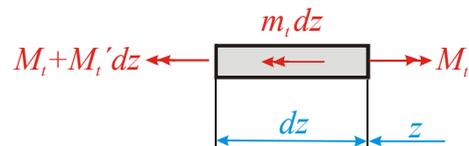
$$\varphi''' - k^2 \varphi' = -\frac{M_t}{EI_{\omega\omega_M}} \quad (3.52)$$

mit:  $k^2 = \frac{GI_t}{EI_{\omega\omega_M}}$   $k$  **Abklingfaktor** . (3.53)

Diese Dgl. wird zweckmäßigerweise noch für ein über die Stablänge verteiltes Moment (Linienmomentendichte) formuliert.

Über die Momentengleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \Rightarrow: \quad M_t' - (M_t' + M_t' dz) - m_t dz &= 0 \\ M_t' &= -m_t \end{aligned} .$$



kommt man auf eine inhomogene gewöhnliche Dgl. vierter Ordnung:

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{m_t}{EI_{\omega\omega_M}} . \quad (3.54)$$

Die **allgemeine Lösung** setzt sich aus einem homogenen und einem partikulären Anteil zusammen.

Der Ansatz  $\varphi_h(z) = A_i e^{\lambda_i z}$  führt auf die charakteristische Gleichung (analog zu [2/3])

$$\lambda_i^4 - k^2 \lambda_i^2 = 0$$

mit dem Ergebnis

$$\varphi_h(z) = A_1 + A_2 z + A_3 e^{-kz} + A_4 e^{-k(l-z)} . \quad (3.55)$$

Bei dieser Formulierung wurde wieder davon Gebrauch gemacht, dass die Terme  $e^{-kz}$  mit wachsendem  $z$  bzw.  $e^{-k(l-z)}$  mit wachsendem  $l - z$  abklingen (s. Zylinderchale).

Die Formulierung mit Hyperbelfunktionen (s. [2/3] ) führt auf:

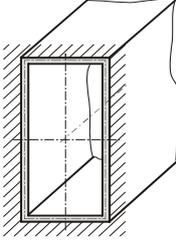
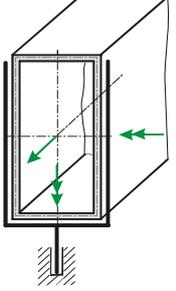
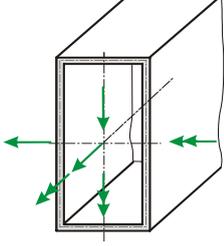
$$\varphi_h(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz \quad (3.56)$$

Die Partikulärlösung  $\varphi_p(z)$  erhält man über einen an die Funktion  $m_t(z)$  angepassten Ansatz.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten können Aussagen getroffen werden über:

$$\varphi ; \quad \varphi' ; \quad \varphi'' = \frac{B}{EI_{\omega\omega_M}}$$

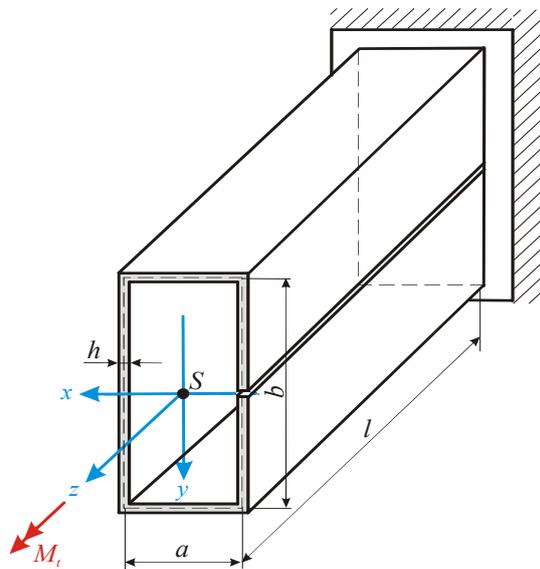
Wichtigste **Randbedingungen**:

| Lagerung                          | Skizze  | Randbedingungen                  | Freiheitsgrad |
|-----------------------------------|---|----------------------------------|---------------|
| Starre Einspannung                |   | $\varphi = 0$<br>$\varphi' = 0$  | $f = 0$       |
| Gabellagerung ohne Axialbelastung |  | $\varphi = 0$<br>$\varphi'' = 0$ | $f = 3$       |
| freies Ende ohne Axialbelastung   |  | $\varphi'' = 0$                  | $f = 6$       |

## 2.4.2 Geschlossene Querschnitte

Die Diskussion des Einflusses der Wölbbehinderung auf den Spannungs- und Verzerrungszustand soll an Hand der Gegenüberstellung eines offenen und eines geschlossenen Querschnitts erfolgen.

**Beispiel:** Geschlitzter (Fall I) bzw. geschlossener (Fall II) dünnwandiger Kasten-träger unter Torsionsmomentenbelastung



Geg.:  $a = 40 \text{ mm}$ ,  $b = 2 a = 80 \text{ mm}$ ,  
 $l = 10 a = 400 \text{ mm}$ ,  $h = 0,1 a = 4 \text{ mm}$ ,  
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  
 $M_t = 500 \text{ Nm}$

Ges.: 1. Schubmittelpunkt  
 2. Verläufe der Einheitsverwölbungen  
 3. Verhältnis der Schubspannungen bei reiner Torsion  
 4. Verhältnis der Drillungen  
 5. Verhältnis der Zusatzspannungen bei Wölb-torsion  
 6. Vergleich der Ergebnisse mit den über DUENQ erhaltenen

### Querschnittskennwerte für beide Profile

- Schwerpunkt, Flächenmomente 2. Ordnung

$$x_S = 0$$

$$y_S = 0$$

$$I_{xx} = 2 \left( \frac{h b^3}{12} + \frac{b^2}{4} a h \right) = \frac{1}{6} (3 a + b) b^2 h = \frac{1}{3} a^4 = 85,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = 2 \left( \frac{a^2}{4} b h + \frac{h a^3}{12} \right) = \frac{1}{6} (a + 3 b) a^2 h = \frac{7}{60} a^4 = 29,87 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0 \quad (\text{Symmetrie zur } x\text{-Achse})$$

- Mittlerer Flächeninhalt, Wandstärke

$$A_m = a b = 2 a^2 = 32 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$h_{\min} = h_{\max} = h$$

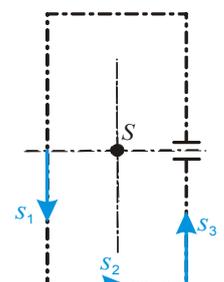
### Querschnittskennwerte offenes Profil (Fall I)

- Torsionsträgheitsmoment (3.28)

$$I_{tI} = 2 \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 h_i^3 l_i = \frac{2}{3} (a + b) h^3 = 0,002 a^4 = 0,512 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

- Widerstandsmoment

$$W_{tI} = \frac{I_{tI}}{h_{\max}} = \frac{2}{3} (a + b) h^2 = 0,02 a^3 = 1,28 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$





- Koordinaten des Schubmittelpunktes  $M$  (3.40)

$$x_M = \frac{I_{x\omega} I_{xy} + I_{y\omega} I_{yy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} = \frac{I_{y\omega}}{I_{xx}} = \frac{\frac{2a+b}{4} a b^2 h}{\frac{1}{6} (3a+b) b^2 h} = \frac{3}{2} \frac{2a+b}{3a+b} a = \frac{6}{5} a = 48 \text{ mm}$$

$$y_M = -\frac{I_{y\omega} I_{xy} + I_{x\omega} I_{xx}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} = 0 \quad (\text{Symmetrie zur } x\text{-Achse})$$

- Einheitsverwölbung bezüglich des Schubmittelpunktes (3.17)

$$\omega_M = \omega_S - x_M y + y_M x + k$$

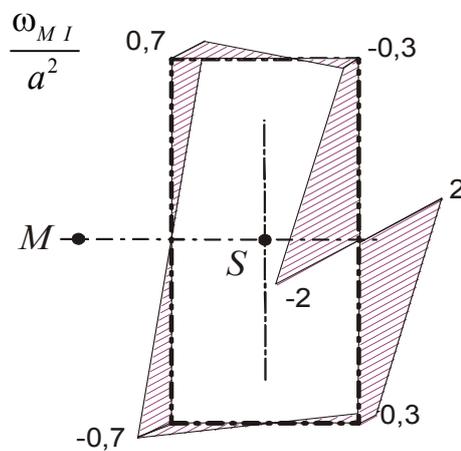
$$\left. \begin{matrix} k = 0 \\ y_M = 0 \end{matrix} \right\} (\text{Symmetrie zur } x\text{-Achse})$$

$$\omega_M = \omega_S - x_M y$$

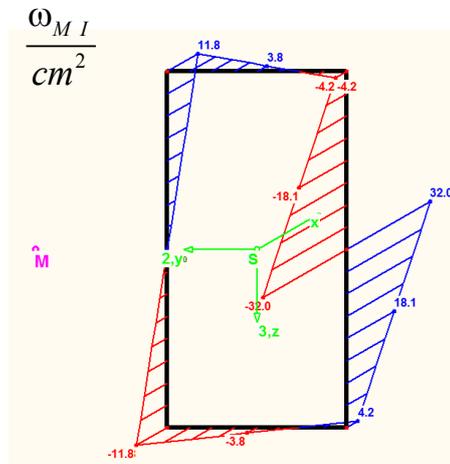
s. obige Tabelle (S. 113)

Grafische Darstellung der Funktion  $\omega_{M I}(s_i)$  für  $b = 2a$  :

Analytisch:



DUENQ 6 mit:  $a^2 = 16 \text{ cm}^2$ :



- Sektoriell statisches Moment (3.38)

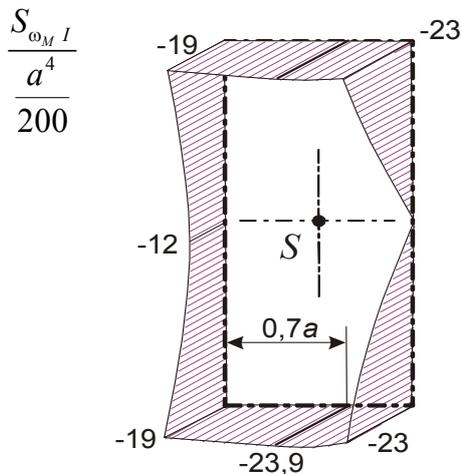
$$S_{\omega_M I}(s) = \int_{(A(s))} \omega_{M I} dA = \int_0^s \omega_{M I} h(\bar{s}) d\bar{s} + S_{\omega_M I}(s_1 = 0)$$

$$S_{\omega_M I}(s_1 = 0) \text{ folgt aus der Bedingung } S_{\omega_M I}(s_3 = \frac{b}{2}) = 0$$

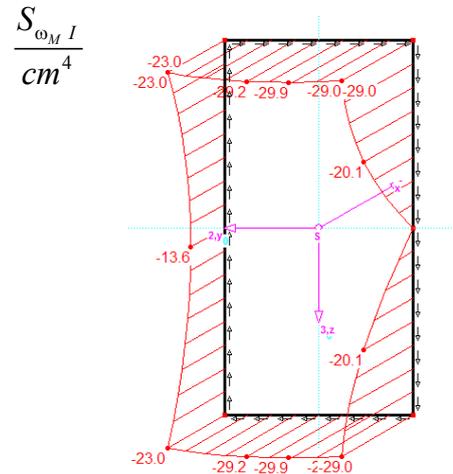
| $i$ | $h_i$ | $S_{\omega_M i I}(s_i)$  |
|-----|-------|--|
| 1   | $h$   | $-\frac{4a+b}{8(3a+b)} a b^2 h - \frac{3a+2b}{4(3a+b)} a h s_1^2$ $= -\frac{a h}{16(3a+b)} [(4a+b) 2b^2 + (3a+2b) 4s_1^2]$   |
| 2   | $h$   | $-\frac{11a+4b}{16(3a+b)} a b^2 h + \frac{b h}{4(3a+b)} [-(3a+2b) a s_2 + (3a+b) s_2^2]$ $= \frac{b h}{16(3a+b)} [-(11a+4b) a b - (3a+2b) 4a s_2 + (3a+b) 4s_2^2]$ |
| 3   | $h$   | $-\frac{15a+4b}{16(3a+b)} a b^2 h + \frac{a h}{4(3a+b)} [3a b s_3 + (9a+4b) s_3^2]$ $= \frac{a h}{16(3a+b)} [-(15a+4b) b^2 + 12a b s_3 + (36a+16b) s_3^2]$         |

Grafische Darstellung  $S_{\omega_M I}$  für  $b = 2a$  :

Analytisch:



DUENQ 6 mit  $\frac{a^4}{200} = 1,28 \text{ cm}^4$ :



$$\frac{\partial S_{\omega_M 2 I}}{\partial s_2} = \frac{b h}{4(3a+b)} [-(3a+2b) a + (3a+b) 2s_2] = 0$$

$$s_{20} = \frac{3a+2b}{2(3a+b)} a = \frac{7}{10} a = 28 \text{ mm}$$

$$|S_{\omega_M I}|_{\max} = |S_{\omega_M 2 I}(s_{20})| = \frac{478}{400} a^3 h = 30,59 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

- Wölbwiderstand (3.43)

$$I_{\omega\omega I} = \int_{(A)} \omega_{MI}^2 dA = 2h \frac{1}{4} \frac{1}{(3a+b)^2} \left[ \begin{aligned} & a^2 \int_{s_1=0}^{\frac{b}{2}} (3a+2b)^2 s_1^2 ds_1 + \\ & + b^2 \int_{s_2=0}^a \left[ (3a+2b) \frac{a}{2} - (3a+b) s_2 \right]^2 ds_2 + \\ & + a^2 \int_{s_3=0}^{\frac{b}{2}} \left[ \frac{3}{2} ab + (9a+4b) s_3 \right]^2 ds_3 \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{1}{24} \frac{a^2 b^2 h}{3a+b} (3a^2 + 34ab + 10b^2) = \frac{111}{300} a^6 = 1515 \cdot 10^6 \text{ mm}^6$$

- Abklingfaktor (3.53)

$$k = \sqrt{\frac{G I_t}{E I_{\omega\omega}}} \quad \text{mit: } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$k_I = \sqrt{\frac{I_{tI}}{2(1+\nu) I_{\omega\omega I}}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}(a+b)h^3}{2(1+\nu) \frac{1}{24} \frac{a^2 b^2 h}{3a+b} (3a^2 + 34ab + 10b^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{8(a+b)(3a+b)h^2}{(1+\nu)a^2 b^2 (3a^2 + 34ab + 10b^2)}} = \sqrt{\frac{3}{13 \cdot 111} \frac{1}{a}} = 0,0456 \frac{1}{a} = 1,14 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$$

$$k_I l = 0,4560$$

$$e^{-k_I l} = 0,6338$$

$$e^{-2k_I l} = 0,4017$$

### Querschnittskennwerte geschlossenes Profil (Fall II)

- Torsionsträgheitsmoment (3.34)

$$I_{tII} = \frac{4 A_m^2}{\circ \quad \cdot)} = \frac{4 a^2 b^2 h}{a+b} = \frac{4}{15} a^4 = 68,27 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

- Widerstandsmoment (3.32)

$$W_{tII} = 2 A_m h_{min} = 2 a b h = 0,4 a^3 = 25,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

- Einheitsverwölbung bezüglich des Schubmittelpunktes (Schwerpunktes) (3.35)

$$\omega_{M II}(s) = \int_0^s r_{tM}(\bar{s}) d\bar{s} - \frac{I_t}{2 A_m} \int_0^s \frac{d\bar{s}}{h(\bar{s})} + \omega_{M 0 II}$$

mit:  $\omega_{M 0 II} = 0$  (Symmetrie)

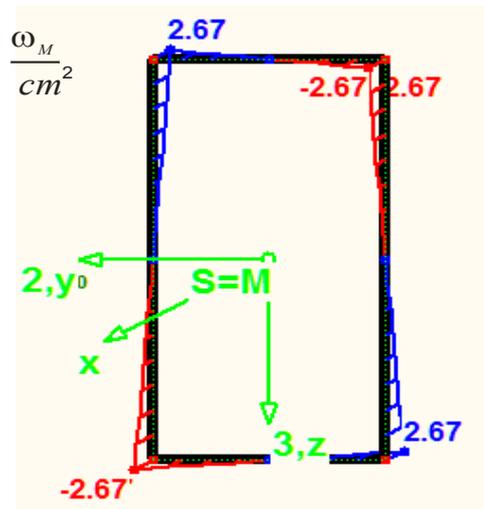
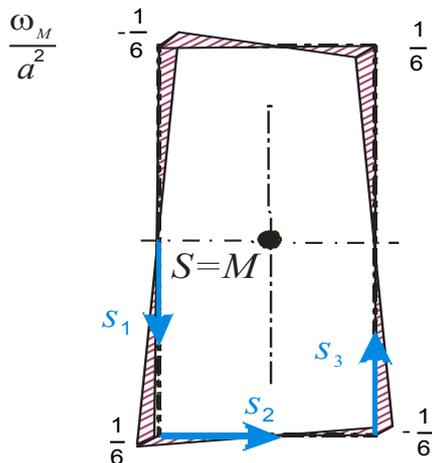
$$\omega_{M i II}(s_i) = r_{tM i} s_i - \frac{4 A_m^2 h}{2(a+b) 2 A_m h} s_i + \omega_{M i 0 II}$$

$$\omega_{M i II}(s_i) = \left( r_{tM i} - \frac{a b}{a+b} \right) s_i + \omega_{M i 0 II}$$

| $i$ | $r_{tM i}$    | $\omega_{M i II}(s_i)$  | $\omega_{M i II}(s_i)$ für $b = 2a$             |
|-----|---------------|---|---|
| 1   | $\frac{a}{2}$ | $\frac{a-b}{a+b} \frac{a}{2} s_1$                               | $-\frac{a}{6} s_1$                              |
| 2   | $\frac{b}{2}$ | $\frac{a-b}{a+b} \frac{b}{2} \left( \frac{a}{2} - s_2 \right)$  | $-\frac{a}{3} \left( \frac{a}{2} - s_2 \right)$ |
| 3   | $\frac{a}{2}$ | $-\frac{a}{2} \frac{a-b}{a+b} \left( \frac{b}{2} - s_3 \right)$ | $\frac{a}{6} (a - s_3)$                         |

Grafische Darstellung der Funktion  $\omega_{M II}(s)$ :

Analytisch: DUENQ 6 mit  $\frac{a^2}{6} = 2,67 \text{ cm}^2$ :



- Sektoriell statisches Moment (analog (3.38) )

$$S_{\omega_{M II}} = \int_{(A(s))} \omega_{M II} dA = \int_0^s \omega_{M II} h(\bar{s}) d\bar{s}$$

| $i$ | $h_i$ | $S_{\omega_M i II}(s_i)$  | $S_{\omega_M i II}(s_i)$ für $b=2a$   |
|-----|-------|---|---|
| 1   | $h$   | $\frac{a-b}{a+b} \frac{a h}{4} s_1^2$   | $-\frac{a^4}{120} \frac{s_1^2}{a^2}$  |
| 2   | $h$   | $\frac{a-b}{a+b} \frac{a b^2 h}{16} \frac{a-b}{a+b} \frac{b h}{4} (a s_2 - s_2^2)$<br>$= \frac{a-b}{a+b} \frac{b h}{4} \left( \frac{a b}{4} + a s_2 - s_2^2 \right)$    | $-\frac{a^4}{120} \left( 1 + 2 \frac{s_2}{a} - 2 \frac{s_2^2}{a^2} \right)$ |
| 3   | $h$   | $\frac{a-b}{a+b} \frac{a b^2 h}{16} - \frac{a h}{4} \frac{a-b}{a+b} (b s_3 - s_3^2)$<br>$= \frac{a-b}{a+b} \frac{a h}{4} \left( \frac{b^2}{16} - b s_3 + s_3^2 \right)$ | $-\frac{a^4}{120} \left( 1 - 2 \frac{s_3}{a} + \frac{s_3^2}{a^2} \right)$   |

--- allgemein:

Die Wölbschubspannungen sind für ein **geschlossenes** Profil durch einen zusätzlichen Term  $\Delta\tau_\omega$  (analog der Spannungsberechnung beim Querkraftschub s. S. 77 ff) zu ergänzen:

$$\tau_\omega = E \varphi'''' \frac{1}{h} S_{\omega_M} + \Delta\tau_\omega \quad (3.57)$$

Er wird über die analoge Aussage zur Verformung gewonnen:

$$\left( \tau_\omega + \Delta\tau_\omega \right) \frac{1}{G} ds = 0$$

$$\Delta\tau_\omega = -E \varphi'''' \quad (3.58)$$

--- speziell:

$$\begin{aligned} \Delta\tau_\omega &= -E \varphi'''' \frac{1}{h} S_M ds \\ \tau_\omega &= E \varphi'''' S_{\omega_M} \frac{1}{h} - E \varphi'''' \frac{1}{h} \\ \tau_\omega &= E \varphi'''' \frac{1}{h} \underbrace{\left( S_{\omega_M} - \dots \right)}_{S_{\omega_M}^*} \end{aligned} \quad (3.59)$$

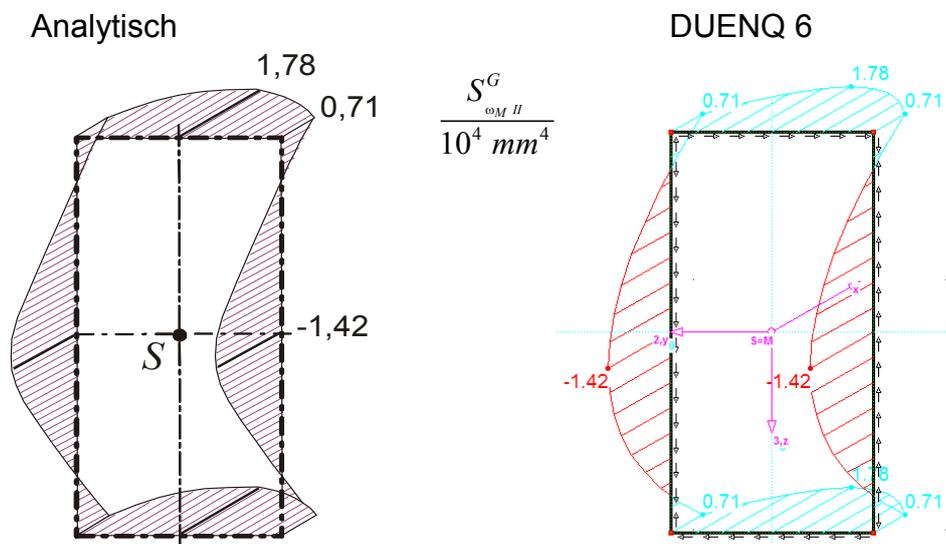
Der zweite Term in (3.59) ist noch bereitzustellen:

$$\begin{aligned} \circ S_{M II} ds & \left[ \int_{s_1=0}^{\frac{b}{2}} S_{\omega_{M II} 1} ds_1 + \int_{s_2=0}^{\frac{a}{2}} S_{\omega_{M II} 2} ds_2 \right] \\ & = \frac{a-b}{a+b} \frac{a b h}{4} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{6} + \frac{a b}{2} \right) = -\frac{a^5}{30} \\ \circ S_M ds & \frac{a^5}{180} \\ \circ ds & a = -\frac{a^4}{180} = -1,422 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Das damit berechnete  $S_{\omega_{M II}}^G(s_i)$  ist in der folgenden Tabelle für  $b=2a$  eingetragen:

| $i$ | $S_{\omega_{M II}}^G(s_i)$ für $b=2a=80 \text{ mm}$   |
|-----|---|
| 1   | $\frac{a^4}{120} \left( \frac{s_1^2}{a^2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{15} \left( \frac{s_1^2}{a^2} - \frac{2}{3} \right) 10^4 \text{ mm}^4$   |
| 2   | $\frac{a^4}{120} \left( \frac{1}{3} + 2 \frac{s_2}{a} - 2 \frac{s_2^2}{a^2} \right) = \frac{32}{15} \left( \frac{1}{3} + 2 \frac{s_2}{a} - 2 \frac{s_2^2}{a^2} \right) 10^4 \text{ mm}^4$ |
| 3   | $\frac{a^4}{120} \left( \frac{1}{3} - 2 \frac{s_3}{a} + \frac{s_3^2}{a^2} \right) = \frac{32}{15} \left( \frac{1}{3} - 2 \frac{s_3}{a} + \frac{s_3^2}{a^2} \right) 10^4 \text{ mm}^4$     |

Grafische Darstellung  $S_{\omega_{M II}}^G(s)$  für  $b=2a$ :



- Wölbwiderstand (3.43)

$$I_{\omega\omega II} = \int_{(A)} \omega_{M II}^2 dA = \frac{a^2 b^2 h (b-a)^2}{24 (a+b)} = \frac{a^6}{180} = 22,76 \cdot 10^6 \text{ mm}^6$$

- Abklingfaktor (s. o.)

$$\begin{aligned} k_{II} &= \sqrt{\frac{I_{t II}}{2(1+\nu) I_{\omega\omega II}}} = \sqrt{\frac{\frac{2 a^2 b^2 h}{a+b}}{2(1+\nu) \frac{a^2 b^2 h (b-a)^2}{24 (a+b)}}} \\ &= \sqrt{\frac{24}{(1+\nu)(b-a)^2}} = \sqrt{\frac{240}{13} \frac{1}{a}} = 4,30 \frac{1}{a} = 0,107 \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

$$k_{II} l = 43$$

$$e^{-k_{II} l} \approx 0$$

$$e^{-2k_{II} l} \approx 0$$

### Verhältnisse der Trägheitsmomente, Widerstandsmomente, Wölbwiderstände und Abklingfaktoren

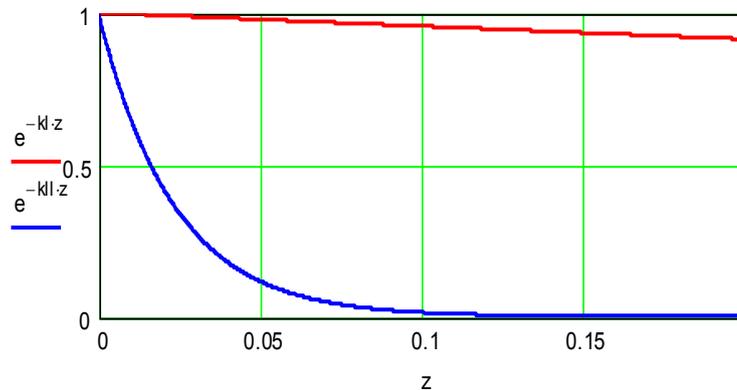
$$\frac{I_{t II}}{I_{t I}} = \frac{\frac{2 a^2 b^2 h}{a+b}}{\frac{2}{3} (a+b) h^3} = 3 \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 h^2} = \frac{4 a^2}{3 h^2} = \frac{400}{3} = 133,3$$

$$\frac{W_{t II}}{W_{t I}} = \frac{\frac{2 a b h}{3 (a+b) h^2}}{\frac{2 a b h}{(a+b) h}} = 3 \frac{a b}{(a+b) h} = 20$$

$$\frac{I_{\omega\omega I}}{I_{\omega\omega II}} = \frac{\frac{1}{24} \frac{a^2 b^2 h}{3 a+b} (3 a^2 + 34 a b + 10 b^2)}{\frac{a^2 b^2 h (b-a)^2}{24 (a+b)}} = \frac{a+b}{(3 a+b)(b-a)^2} (3 a^2 + 34 a b + 10 b^2) = \frac{333}{5} = 66,6$$

$$\frac{k_{II}}{k_I} = \sqrt{\frac{I_{t II} I_{\omega\omega I}}{I_{t I} I_{\omega\omega II}}} = \sqrt{8880} = 94,2$$

Grafische Darstellung des Abklingverhaltens der Zusatzspannungen beim **offenen** und beim **geschlossenen** Profil:



$z := 0, 0.0001 \dots 1$

**Verhältnisse der Spannungen auf Grund der reinen Torsion und der Drillungen**

$$\tau_{sv \max I} = \frac{M_t}{W_{tI}} \qquad \tau_{sv \max II} = \frac{M_t}{W_{tII}}$$

$$\frac{\tau_{sv \max I}}{\tau_{sv \max II}} = \frac{W_{tII}}{W_{tI}} = 20$$

$$\vartheta_I = \frac{M_t}{G I_{tI}} \qquad \vartheta_{II} = \frac{M_t}{G I_{tII}}$$

$$\frac{\vartheta_I}{\vartheta_{II}} = \frac{I_{tII}}{I_{tI}} = 133,3$$

**Lösung der Torsions-Differenzialgleichung (3.52)**

$$\varphi'''' - k^2 \varphi' = -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega_M}} \qquad k^2 = \frac{G I_t}{E I_{\omega\omega_M}}$$

Homogene Lösung:

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i z}$$

$$\lambda_i^3 - k^2 \lambda_i = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_i^2 = k^2$$

$$\lambda_{2,3} = \pm k$$

$$\varphi_h(z) = B_1 + B_2 e^{-kz} + B_3 e^{-k(l-z)}$$

Partikuläre Lösung:

$$\varphi_p = C z$$

$$-k^2 C = -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega_M}}$$

$$C = \frac{M_t}{k^2 E I_{\omega\omega_M}}$$

$$\varphi_p = \frac{M_t}{k^2 E I_{\omega\omega_M}} z = \frac{M_t}{G I_t} z$$

Allgemeine Lösung und deren Ableitungen:

$$\varphi(z) = B_1 + B_2 e^{-kz} + B_3 e^{-k(l-z)} + \frac{M_t}{G I_t} z$$

$$\varphi'(z) = -k B_2 e^{-kz} + k B_3 e^{-k(l-z)} + \frac{M_t}{G I_t}$$

$$\varphi''(z) = k^2 B_2 e^{-kz} + k^2 B_3 e^{-k(l-z)}$$

Randbedingungen, Konstanten:

$$\varphi(0) = 0 \quad B_1 + B_2 + B_3 e^{-kl} = 0$$

$$\varphi'(0) = 0 \quad -B_2 + B_3 e^{-kl} + \frac{M_t}{k G I_t} = 0$$

$$\varphi''(l) = 0 \quad B_2 e^{-kl} + B_3 = 0$$

$$B_1 = -\frac{M_t}{k G I_t} \frac{1 - e^{-2kl}}{1 + e^{-2kl}}$$

$$B_2 = \frac{M_t}{k G I_t} \frac{1}{1 + e^{-2kl}}$$

$$B_3 = -\frac{M_t}{k G I_t} \frac{e^{-kl}}{1 + e^{-2kl}}$$

Spezielle Lösung:

$$\varphi(z) = \frac{M_t}{k G I_t} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \left[ -1 + e^{-2kl} + e^{-kz} - e^{-k(2l-z)} + k z (1 + e^{-2kl}) \right]$$

$$\varphi'(z) = \frac{M_t}{G I_t} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \left[ 1 + e^{-2kl} - e^{-kz} - e^{-k(2l-z)} \right]$$

$$\varphi''(z) = \frac{M_t k}{G I_t} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \left[ e^{-kz} - e^{-k(2l-z)} \right]$$

$$\varphi'''(z) = \frac{M_t}{E I_{\omega\omega}} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \left[ -e^{-kz} - e^{-k(2l-z)} \right]$$

Spezielle Werte:

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(l) = \frac{M_t l}{G I_t} \left[ \frac{-1 + e^{-2kl}}{kl(1 + e^{-2kl})} + 1 \right]$$

$$\varphi'(0) = 0$$

$$\varphi'(l) = \frac{M_t}{G I_t} \frac{(1 - e^{-kl})^2}{1 + e^{-2kl}}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(0) &= \frac{M_t k}{G I_t} \frac{1 - e^{-2kl}}{1 + e^{-2kl}} & \varphi''(l) &= 0 \\ \varphi'''(0) &= -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega}} & \varphi'''(l) &= -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega}} \frac{2 e^{-kl}}{1 + e^{-2kl}}\end{aligned}$$

### Verhältnisse der Zusatzspannungen auf Grund der Wölb torsion

- Zusatznormalspannung (3.41)

$$\sigma_{\omega} = -E \varphi'' \omega_M$$

In der Einspannung ( $z = 0$ ) gilt:

$$\frac{\sigma_{\omega I}}{\sigma_{\omega II}} = \frac{k_I}{k_{II}} \frac{I_{tII}}{I_{tI}} \frac{1 - e^{-2k_I l}}{1 - e^{-2k_{II} l}} \frac{1 + e^{-2k_{II} l}}{1 + e^{-2k_I l}} \frac{\omega_{MI}}{\omega_{MII}} = \frac{133,3}{94,2} 0,427 \frac{\omega_{MI}}{\omega_{MII}} = 0,604 \frac{\omega_{MI}}{\omega_{MII}}$$

Die Maxima der Beträge der Verwölbungen treten an **unterschiedlichen** Stellen im Querschnitt auf!

$$\left| \omega_{MI} \right|_{\max} = 2 a^2$$

$$\left| \omega_{MII} \right|_{\max} = \frac{a^2}{6}$$

$$\frac{\left| \sigma_{\omega I} \right|_{\max}}{\left| \sigma_{\omega II} \right|_{\max}} = 0,604 \frac{2}{\frac{1}{6}} = 7,25$$

- Zusatzschubspannung (3.47)

$$\tau_{\omega} = E \varphi''' S_{\omega_M}(s) \frac{1}{h(s)}$$

In der Einspannung ( $z = 0$ ) gilt:

$$\frac{\tau_{\omega I}}{\tau_{\omega II}} = \left( \frac{k_I}{k_{II}} \right)^2 \frac{I_{tII}}{I_{tI}} \frac{S_{\omega_{MI}}(s)}{S_{\omega_{MII}}^G(s)} = \frac{133,3}{8880} \frac{S_{\omega_{MI}}(s)}{S_{\omega_{MII}}^G(s)} = 0,015 \frac{S_{\omega_{MI}}(s)}{S_{\omega_{MII}}^G(s)}$$

Die Maxima der Beträge der sektoriellen statischen Momente treten an **unterschiedlichen** Stellen im Querschnitt auf!

$$|S_{\omega_M I}|_{\max} = 30,6 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$|S_{\omega_M II}^G|_{\max} = 1,78 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\frac{|\tau_{\omega I}|_{\max}}{|\tau_{\omega II}|_{\max}} = 0,015 \frac{30,6}{1,78} = 0,258$$

## Ergebnistabellen (Original) der Rechnung mit dem Programm DUENQ6

- Offenes Profil

| Bezeichnung                    | Symbol   | Größe   | Einheit         | Kommentar                             |
|--------------------------------|----------|---------|-----------------|---------------------------------------|
| Querschnittsfläche             | A        | 9,6     | cm <sup>2</sup> |                                       |
| Lage des Schwerpunktes         | yS,0     | 2,00    | cm              | bezogen auf Nullpunkt                 |
|                                | zS,0     | 4,00    | cm              |                                       |
| Trägheitsmomente               | Iy       | 85,63   | cm <sup>4</sup> | bezogen auf Schwerachsen y, z         |
|                                | Iz       | 30,08   | cm <sup>4</sup> |                                       |
|                                | Iyz      | 0,00    | cm <sup>4</sup> |                                       |
| Hauptachseneckwinkel           | a        | 0,00    | °               | positiv im Uhrzeigersinn              |
| Hauptträgheitsmomente          | I2       | 85,63   | cm <sup>4</sup> | bezogen auf die Hauptachsen 2, 3 im S |
|                                | I3       | 30,08   | cm <sup>4</sup> |                                       |
| Polare Trägheitsmomente        | Ip       | 115,71  | cm <sup>4</sup> |                                       |
|                                | Ip,M     | 335,34  | cm <sup>4</sup> | bezogen auf Schubmittelpunkt M        |
| Torsionsträgheitsmoment        | It       | 0,51    | cm <sup>4</sup> |                                       |
| Sekundäres Torsionsträgheitsm. | It,s     | 71,14   | cm <sup>4</sup> |                                       |
| Lage des Schubmittelpunktes    | yM,0     | -2,78   | cm              | bezogen auf Nullpunkt                 |
|                                | zM,0     | 4,00    | cm              |                                       |
|                                | yM       | -4,78   | cm              | bezogen auf Schwerpunkt               |
|                                | zM       | 0,00    | cm              |                                       |
| Wölbwiderstände                | Io,S     | 3481,08 | cm <sup>6</sup> | bezogen auf Schwerpunkt               |
|                                | Io,M     | 1515,09 | cm <sup>6</sup> | bezogen auf Schubmittelpunkt          |
| Hilfswert für Wölbverdrehung   | ro,M     | 0,00    |                 |                                       |
| Wölbwiderstandsmomente         | Wo,M,max | 47,35   | cm <sup>4</sup> | im Knoten 6                           |
|                                | Wo,M,min | -47,35  | cm <sup>4</sup> | im Knoten 5                           |
| Abklingfaktor                  | IM       | 0,0114  | 1/cm            |                                       |

- Geschlossenes Profil

| Bezeichnung                    | Symbol          | Größe  | Einheit         | Kommentar                             |
|--------------------------------|-----------------|--------|-----------------|---------------------------------------|
| Querschnittsfläche             | A               | 9,60   | cm <sup>2</sup> |                                       |
| Lage des Schwerpunktes         | $y_{S,0}$       | 2,00   | cm              | bezogen auf Nullpunkt                 |
|                                | $z_{S,0}$       | 4,00   | cm              |                                       |
| Trägheitsmomente               | $I_y$           | 85,63  | cm <sup>4</sup> | bezogen auf Schwerachsen y, z         |
|                                | $I_z$           | 30,08  | cm <sup>4</sup> |                                       |
|                                | $I_{yz}$        | 0,00   | cm <sup>4</sup> |                                       |
| Hauptachseneckwinkel           | $\alpha$        | 0,00   | °               | positiv im Uhrzeigersinn              |
| Hauptträgheitsmomente          | $I_2$           | 85,63  | cm <sup>4</sup> | bezogen auf die Hauptachsen 2, 3 im S |
|                                | $I_3$           | 30,08  | cm <sup>4</sup> |                                       |
| Polare Trägheitsmomente        | $I_p$           | 115,71 | cm <sup>4</sup> |                                       |
|                                | $I_{p,M}$       | 115,71 | cm <sup>4</sup> | bezogen auf Schubmittelpunkt M        |
| Torsionsträgheitsmoment        | $I_t$           | 68,78  | cm <sup>4</sup> |                                       |
| - Anteil aus St.Venant         | $I_{t,St.Ven.}$ | 0,51   | cm <sup>4</sup> |                                       |
| - Anteil aus Bredt             | $I_{t,Bredt}$   | 68,27  | cm <sup>4</sup> |                                       |
| Sekundäres Torsionsträgheitsm. | $I_{t,s}$       | 6,56   | cm <sup>4</sup> |                                       |
| Lage des Schubmittelpunktes    | $y_{M,0}$       | 2,00   | cm              | bezogen auf Nullpunkt                 |
|                                | $z_{M,0}$       | 4,00   | cm              |                                       |
|                                | $y_M$           | 0,00   | cm              | bezogen auf Schwerpunkt               |
|                                | $z_M$           | 0,00   | cm              |                                       |
| Wölbwiderstände                | $I_{o,S}$       | 22,76  | cm <sup>6</sup> | bezogen auf Schwerpunkt               |
|                                | $I_{o,M}$       | 22,76  | cm <sup>6</sup> | bezogen auf Schubmittelpunkt          |
| Hilfswert für Wölbverdrehung   | $r_{o,M}$       | 0,00   |                 |                                       |
| Wölbwiderstandsmomente         | $W_{o,M,max}$   | 8,53   | cm <sup>4</sup> | im Knoten 3                           |
|                                | $W_{o,M,min}$   | -8,53  | cm <sup>4</sup> | im Knoten 2                           |
| Abklingfaktor                  | $\lambda_M$     | 1,079  | 1/cm            |                                       |

## Schlussfolgerungen

- Die Einheitsverwölbung eines offenen Profils ist deutlich größer als in einem gleichartigen geschlossenen Profil.
- Drillung und Spannung auf Grund der reinen Torsion sind beim offenen Profil wesentlich größer.
- Der Abklingfaktor beim geschlossenen Profil ist wesentlich größer.
- Auf Grund der größeren Einheitsverwölbung und des kleineren Abklingfaktors sind die Zusatzspannungen beim offenen Profil wesentlich größer als beim geschlossenen.

## Zugabe

### Spannungen im offenen Profil

Reine Torsion:

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_{tI}} = \frac{M_t}{\frac{2}{3}(a+b)h^2} = 150 \frac{M_t}{a^3} = \text{konst.}$$

$$\varphi_t(l) = \frac{M_t l}{G I_{tI}} = \frac{M_t l}{G \frac{2}{3}(a+b)h^3} = 5000 \frac{M_t}{G a^3}$$

Wölbtorsion:

$$\begin{aligned} |\sigma_{\omega I}|_{\max} &= \left| \sigma_{\omega I}(s_3 = \frac{b}{2}; z = 0) = E \varphi''(0) \omega_{MI}(s_3 = \frac{b}{2}) \right| = \left| \frac{3 M_t k_I (1+\nu)}{(a+b) h^3} \omega_{MI}(s_3 = \frac{b}{2}) \right| \\ &= \frac{M_t k_I (1+\nu)}{h^3} 2 a = 118,56 \frac{M_t}{a^3} \\ |\tau_{\omega I}|_{\max} &= \left| \tau_{\omega 2I}(s_2 = \frac{7}{10} a; z = 0) \right| = \left| E \varphi'''(0) S_{\omega 2I}(s_2 = \frac{7}{10} a) \frac{1}{h} \right| = \frac{487 M_t a^3}{400 I_{\omega\omega I}} \\ &= \frac{487}{400} \frac{300}{111} \frac{M_t}{a^3} = 3,29 \frac{M_t}{a^3} \end{aligned}$$

### Spannungen im geschlossenen Profil

Reine Torsion:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 A_m h_{\min}} = \frac{M_t}{2 a b h} = \frac{5 M_t}{2 a^3} = \text{konst.}$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{4 A_m^2 G} \circ \quad \dots \quad \frac{1+b}{b^2 h} = \frac{M_t (a+b)}{2 G a^2 b^2 h} = \frac{15 M_t}{4 G a^4} =$$

Wölbtorsion:

$$\begin{aligned} |\sigma_{\omega II}|_{\max} &= \left| \sigma_{\omega II}(s_3 = \frac{b}{2}; z = 0) = E \varphi''(0) \omega_{MII}(s_3 = \frac{b}{2}) \right| = \left| \frac{3 M_t k_{II} (1+\nu)}{(a+b) h^3} \omega_{MII}(s_3 = \frac{b}{2}) \right| \\ &= \frac{M_t k_{II} (1+\nu)}{h^3} 2 a = 118,56 \frac{M_t}{a^3} \end{aligned}$$

$$\tau_{\omega 0} = E \varphi'''(0) \circ \quad \dots \quad \frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\omega II} &= -E \varphi''' S_{\omega M II} \frac{1}{h} + \tau_{\omega 0} = -E \varphi''' S_{\omega M II} \frac{1}{h} - E \varphi''' \frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) \\
&= -E \varphi''' \left[ \frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) + \right] S_{\omega M II} \frac{1}{h} \\
\tau_{\omega 1 II} &= -E \varphi''' \left[ \frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) - \frac{a-b}{a+b} \frac{a}{4} s_1^2 \right] \\
&= -E \varphi''' \frac{a^3}{12} \left[ -\frac{1}{36} + \frac{s_1^2}{a^2} \right] \\
\tau_{\omega 2 II} &= -E \varphi''' \left[ \frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) - \frac{a-b}{a+b} \frac{b}{4} \left( \frac{a b}{4} + a s_2 - s_2^2 \right) \right] \\
&= -E \varphi''' \frac{a^3}{12} \left[ \frac{35}{36} + 2 \frac{s_2}{a} - 2 \frac{s_2^2}{a^2} \right] \\
\tau_{\omega 3 II} &= -E \varphi''' \left[ \frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) + \frac{a-b}{a+b} \frac{a}{4} \left( -\frac{b^2}{16} + b s_3 - s_3^2 \right) \right] \\
&= -E \varphi''' \frac{a^3}{12} \left[ \frac{2}{9} - 2 \frac{s_3}{a} + \frac{s_3^2}{a^2} \right] = \frac{M_t}{a^3} = \frac{M_t}{a^3}
\end{aligned}$$