

2.4 Wölbtorsion

2.4.1 Offene Querschnitte

Wird die Funktion des Verdrehwinkels keiner Einschränkung ($\varphi''(z) = 0$) unterworfen, dann existiert als einzige Dehnung ε_{zz} (s. (3.12)):

$$\varepsilon_{zz} = v_z' = v_{z0}' - \varphi''(y_D x - x_D y + \omega) \quad .$$

Man erhält damit die einzige nicht verschwindende Normalspannung:

$$\sigma_{\omega} = \sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz} = E \left[v_{z0}' - \varphi''(y_D x - x_D y + \omega) \right] \quad . \quad \textbf{Wölbnormalspannung} \quad (3.37)$$

Erfolgt die Belastung ausschließlich durch ein Torsionsmoment, dann verschwinden die mit σ_{zz} formulierten Schnittgrößen. Demzufolge gilt (s. (1.9)):

$$F_L = \int_{(A)} \sigma_{zz} dA = 0 \quad M_{bx} = \int_{(A)} \sigma_{zz} y dA = 0 \quad -M_{by} = \int_{(A)} \sigma_{zz} x dA = 0 \quad .$$

Mit σ_{zz} aus (3.37) wird daraus:

$$\begin{aligned} 0 &= v_{z0}' \int_{(A)} dA - \varphi'' \left(y_D \int_{(A)} x dA - x_D \int_{(A)} y dA + \int_{(A)} \omega dA \right) \\ 0 &= v_{z0}' \int_{(A)} x dA - \varphi'' \left(y_D \int_{(A)} x^2 dA - x_D \int_{(A)} x y dA + \int_{(A)} x \omega dA \right) \\ 0 &= v_{z0}' \int_{(A)} y dA - \varphi'' \left(y_D \int_{(A)} x y dA - x_D \int_{(A)} y^2 dA + \int_{(A)} y \omega dA \right) \quad . \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann mit:

$A = \int_{(A)} dA$	Flächeninhalt
$S_y = \int_{(A)} x dA \quad S_x = \int_{(A)} y dA$	statische Momente der Fläche
$I_{xx} = \int_{(A)} y^2 dA \quad I_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA \quad I_{xy} = - \int_{(A)} x y dA$	Flächenmomente 2. Ordnung
$S_{\omega} = \int_{(A)} \omega dA$	sektorielles statisches Moment
$I_{x\omega} = \int_{(A)} x \omega dA \quad I_{y\omega} = \int_{(A)} y \omega dA$	Sektorzentrifugalmomente
	(3.38)
	(3.39)

und den speziellen Werten für ein Schwerpunkts-Koordinatensystem

$$S_x = S_y = S_{\omega} = 0$$

kürzer geschrieben werden:

$$\begin{aligned} 0 &= v_{z0}' A \\ 0 &= \varphi'' (I_{x0} + y_D I_{yy} + x_D I_{xy}) \\ 0 &= \varphi'' (I_{y0} - y_D I_{xy} - x_D I_{xx}) \end{aligned} .$$

Aus der ersten Gleichung folgt (wie erwartet):

$$v_{z0} =$$

Die anderen beiden Gleichungen sind dann erfüllt für:

$$\varphi' = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi = \text{konst.} \quad \text{d.h. reine Torsion}$$

bzw.:

$$\begin{aligned} x_D &= \frac{I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \\ y_D &= -\frac{I_{xy}}{I_{xx} + I_{yy}} \end{aligned} . \quad (3.40)$$

Damit steht neben (3.5) ein weiterer Gleichungssatz zur Bestimmung des Schubmittelpunktes M - des sich bei fehlender Fixierung des Drehpunktes D frei einstellenden Punktes - zur Verfügung. An Hand der konkreten Aufgabenstellung ist daher zu entscheiden, welcher Formelsatz die gewünschten Koordinaten effektiver liefert.

Für die Wölbnormalspannung (3.37) gilt mit (3.17):

$$\sigma_\omega = -E \varphi'' \omega_M . \quad (3.41)$$

Mit σ_ω und ω_M wird eine weitere Schnittgröße, das so genannte **Bimoment** B formuliert:

$$B(z) = \int_{(A)} \sigma_\omega \omega_M dA = -E \varphi'' \int_{(A)} \omega_M^2 dA = -E \varphi'' I_{\omega\omega_M} \quad (3.42)$$

mit:

$$I_{\omega\omega_M} = \int_{(A)} \omega_M^2 dA \quad I_{\omega\omega_M} \text{ **Sektorträgheitsmoment** (Wölbwiderstand)} \quad (3.43)$$

Das Produkt $E I_{\omega\omega_M}$ wird als **Wölbsteifigkeit** bezeichnet.

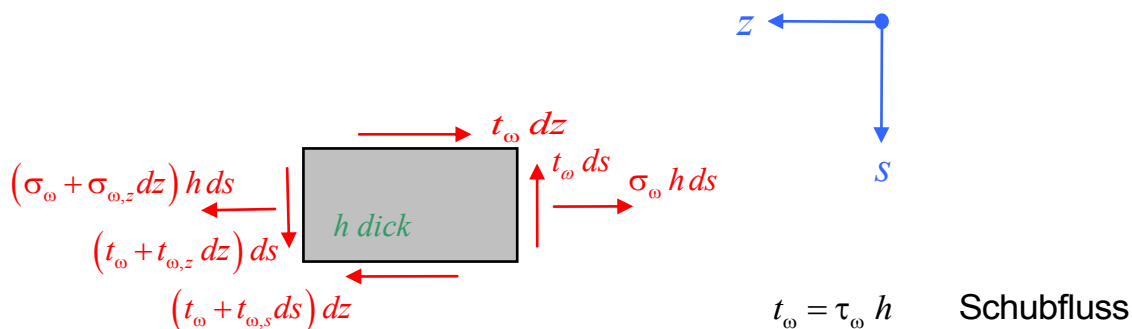
Mit dem Bimoment lautet die Wölbnormalspannung:

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_{\omega\omega_M}} \omega_M . \quad (3.44)$$

Beim *allgemeinen* Belastungszustand setzt sich damit die Normalspannung in Stablängsrichtung aus folgenden Anteilen zusammen (Beschreibung mit x und y als Hauptachsen – s. o.):

$$\sigma_{zz}(s, z) = \frac{F_L(z)}{A} + \frac{M_{bx}(z)}{I_{xx}} y(s) - \frac{M_{by}(z)}{I_{yy}} x(s) + \frac{B(z)}{I_{\omega\omega_M}} \omega_M(s) \quad (3.45)$$

Die Wölbnormalspannungen σ_ω bedingen **sekundäre Schubspannungen** τ_ω , die zusätzlich zu den Schubspannungen der reinen Torsion τ_{sv} (bisher τ) auftreten. Diese werden über ein Kräftegleichgewicht in Stablängsrichtung am Stabelement $dV = ds dz h$ gewonnen:



$$\rightarrow: t_{\omega} dz - (t_{\omega} + t_{\omega,s} ds) dz + \sigma_{\omega} h ds - (\sigma_{\omega} + \sigma_{\omega,z} dz) h ds = 0$$

$$t_{\omega,s} + \sigma_{\omega,z} h = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\omega} = - \int_{(s)} \sigma_{\omega,z} h ds \quad .$$

Mit σ_ω nach Gleichung (3.41) wird daraus:

$$t_{\omega}(s, z) = E \varphi'''(z) \int_0^s \omega_M(\bar{s}) h(\bar{s}) d\bar{s} + t_{\omega 0}(z) \quad (3.46)$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Randbedingung $\tau_\omega(s=0, z) = 0$ zu null. Die Beziehung für die sekundäre Schubspannung lautet schließlich:

$$\tau_\omega(s, z) = \frac{E \varphi'''(z)}{h(s)} \int_0^s \omega_M(\bar{s}) h(\bar{s}) d\bar{s} \quad ,$$

oder:

$$\tau_\omega(s, z) = E \varphi'''(z) \frac{S_{\omega_M}(s)}{h(s)} \quad , \quad (3.47)$$

mit:

$$S_{\omega_M} = \int_0^s \omega_M(\bar{s}) h(\bar{s}) d\bar{s} \quad \text{sektorielles statisches Moment (s. (3.38))}$$

Das Torsionsmoment M_t wird als Summe aus dem der reinen Torsion $M_{t_{sv}}$ und dem der Wölbtorsion $M_{t_{\omega}}$ aufgefasst:

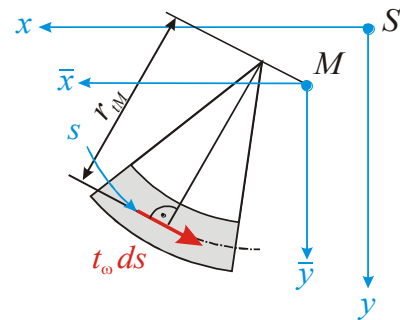
$$M_t(z) = M_{t_{\omega}}(z) + M_{t_{sv}} \quad . \quad (3.48)$$

Für $M_{t_{sv}}$ gilt die bekannte Beziehung (3.22):

$$M_{t_{sv}} = G I_t \varphi' \quad . \quad (3.22)$$

$M_{t_{\omega}}$ ist im Gegensatz zu $M_{t_{sv}}$ vom Bezugspunkt abhängig. Es folgt aus einer Äquivalenzbetrachtung für das Moment um die Stabachse (s. auch S. 102):

$$M_{t_{\omega}} = \int_0^l t_{\omega} r_{tM} ds \quad .$$



Mit t_{ω} über Gleichung (3.46) wird daraus:

$$M_{t_{\omega}} = E \varphi''' \int_0^l \left[\int_0^s \omega_M h d\bar{s} \right] r_{tM} ds \quad .$$

Unter Beachtung von $r_{tM} ds = d\omega_M$ (s. (3.14)), führt eine partielle Integration über:

$$M_{t_{\omega}} = E \varphi''' \int_0^l \underbrace{1}_{u'} \left[\int_0^s \omega_M h d\bar{s} \right] d\omega_M$$

vorerst auf:

$$M_{t_{\omega}} = E \varphi''' \left[\omega_M \int_0^s \omega_M h d\bar{s} \Big|_{s=0}^{s=l} - \int_{(A)} \omega_M^2 dA \right] \quad .$$

Da

$$S_{\omega_M} = \int_0^l \omega_M h ds = \int_{(A)} \omega_M dA = 0 \quad ,$$

wird daraus mit dem Sektorträgheitsmoment $I_{\omega\omega_M}$ (3.43):

$$M_{t_{\omega}} = -E I_{\omega\omega_M} \varphi''' \quad . \quad (3.49)$$

Diese Beziehung wird in die Gleichung für $\tau_{\omega}(s, z)$ (3.47) eingesetzt:

$$\tau_{\omega}(s, z) = - \frac{M_{t_{\omega}}(z)}{I_{\omega\omega_M}} \frac{S_{\omega_M}(s)}{h(s)} \quad . \quad (3.50)$$

Beim *allgemeinen* Belastungszustand setzt sich damit die Schubspannung tangential zur Profilmittellinie aus folgenden Anteilen zusammen (Beschreibung mit x und y als Hauptachsen – s. o.):

$$\tau_{sz}(s, z) = \tau_{sv}(s) - \frac{1}{h(s)} \left[\frac{F_{Qy}(z)}{I_{xx}} S_{x0}(s) + \frac{F_{Qx}(z)}{I_{yy}} S_{y0}(s) + \frac{M_{t\omega}(z)}{I_{\omega\omega_M}} S_{\omega_M}(s) \right] \quad (3.51)$$

Mit den bereitgestellten $M_{t,sv}$ (3.22) und $M_{t\omega}(z)$ (3.49) ergibt sich nach (3.49) die **Torsions-Dgl.** zu:

$$-E I_{\omega\omega_M} \varphi'''(z) + G I_t \varphi'(z) = M_t(z)$$

$$\varphi''' - k^2 \varphi' = -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega_M}} \quad (3.52)$$

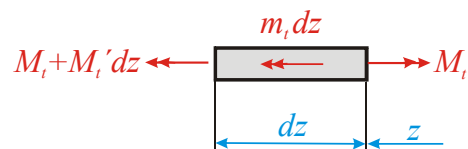
mit: $k^2 = \frac{G I_t}{E I_{\omega\omega_M}}$ k **Abklingfaktor** (3.53)

Diese Dgl. wird zweckmäßigerweise noch für ein über die Stablänge verteiltes Moment (Linienmomentendichte) formuliert.

Über die Momentengleichgewichtsbedingung

$$\Rightarrow: M_t' - (M_t' + M_t' dz) - m_t dz = 0$$

$$M_t' = -m_t$$



kommt man auf eine inhomogene gewöhnliche Dgl. vierter Ordnung:

$$\varphi^{IV} - k^2 \varphi'' = \frac{m_t}{E I_{\omega\omega_M}} \quad (3.54)$$

Die **allgemeine Lösung** setzt sich aus einem homogenen und einem partikulären Anteil zusammen.

Der Ansatz $\varphi_h(z) = A_i e^{\lambda_i z}$ führt auf die charakteristische Gleichung (analog zu [2/3])

$$\lambda_i^4 - k^2 \lambda_i^2 = 0$$

mit dem Ergebnis

$$\varphi_h(z) = A_1 + A_2 z + A_3 e^{-kz} + A_4 e^{-k(l-z)} \quad (3.55)$$

Bei dieser Formulierung wurde wieder davon Gebrauch gemacht, dass die Terme e^{-kz} mit wachsendem z bzw. $e^{-k(l-z)}$ mit wachsendem $l - z$ abklingen (s. Zylinderschale).

Die Formulierung mit Hyperbelfunktionen (s. [2/3]) führt auf:

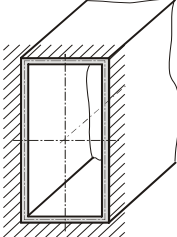
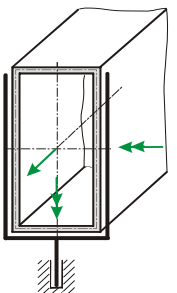
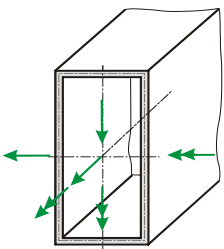
$$\varphi_h(z) = C_1 + C_2 z + C_3 \sinh kz + C_4 \cosh kz \quad . \quad (3.56)$$

Die Partikulärlösung $\varphi_p(z)$ erhält man über einen an die Funktion $m_t(z)$ angepassten Ansatz.

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten können Aussagen getroffen werden über:

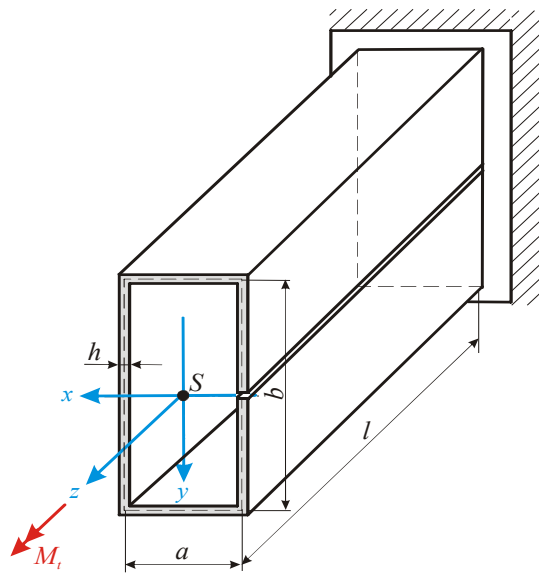
$$\varphi ; \quad \varphi' ; \quad \varphi'' = \frac{B}{EI_{\omega\omega_M}} \quad .$$

Wichtigste **Randbedingungen**:

Lagerung	Skizze	Randbedingungen	Freiheitsgrad
Starre Einspannung		$\varphi = 0$ $\varphi' = 0$	$f = 0$
Gabellagerung ohne Axialbelastung		$\varphi = 0$ $\varphi'' = 0$	$f = 3$
freies Ende ohne Axialbelastung		$\varphi'' = 0$	$f = 6$

2.4.2 Geschlossene Querschnitte

Die Diskussion des Einflusses der Wölbbehinderung auf den Spannungs- und Verzerrungszustand soll an Hand der Gegenüberstellung eines offenen und eines geschlossenen Querschnitts erfolgen.

Beispiel: Geschlitzter (Fall I) bzw. geschlossener (Fall II) dünnwandiger Kasten-träger unter Torsionsmomentenbelastung


Geg.: $a = 40 \text{ mm}$, $b = 2 a = 80 \text{ mm}$,
 $l = 10 a = 400 \text{ mm}$, $h = 0,1 a = 4 \text{ mm}$,
 $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$,
 $M_t = 500 \text{ Nm}$

Ges.: 1. Schubmittelpunkt
 2. Verläufe der Einheitsverwölbungen
 3. Verhältnis der Schubspannungen bei reiner Torsion
 4. Verhältnis der Drillungen
 5. Verhältnis der Zusatzspannungen bei Wölb-torsion
 6. Vergleich der Ergebnisse mit den über DUENQ erhaltenen

Querschnittskennwerte für beide Profile

- Schwerpunkt, Flächenmomente 2. Ordnung

$$x_S = 0$$

$$y_S = 0$$

$$I_{xx} = 2 \left(\frac{h b^3}{12} + \frac{b^2}{4} a h \right) = \frac{1}{6} (3 a + b) b^2 h = \frac{1}{3} a^4 = 85,33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{yy} = 2 \left(\frac{a^2}{4} b h + \frac{h a^3}{12} \right) = \frac{1}{6} (a + 3 b) a^2 h = \frac{7}{60} a^4 = 29,87 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = 0 \quad (\text{Symmetrie zur } x\text{-Achse})$$

- Mittlerer Flächeninhalt, Wandstärke

$$A_m = a b = 2 a^2 = 32 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$$

$$h_{\min} = h_{\max} = h$$

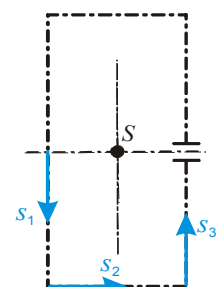
Querschnittskennwerte offenes Profil (Fall I)

- Torsionsträgheitsmoment (3.28)

$$I_{tI} = 2 \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 h_i^3 l_i = \frac{2}{3} (a + b) h^3 = 0,002 a^4 = 0,512 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

- Widerstandsmoment

$$W_{tI} = \frac{I_{tI}}{h_{\max}} = \frac{2}{3} (a + b) h^2 = 0,02 a^3 = 1,28 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$



- Einheitsverwölbung bezüglich des Schwerpunktes S (3.14)

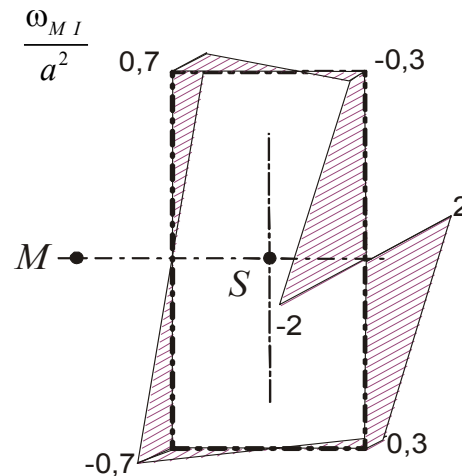
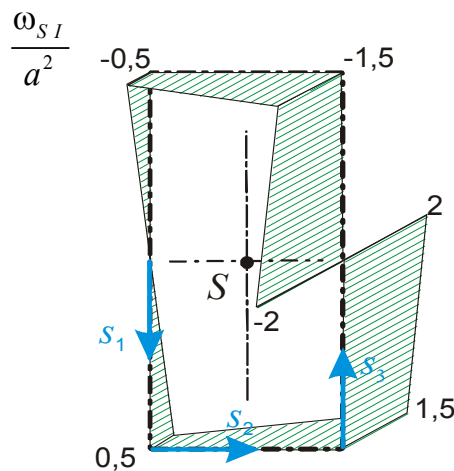
$$\omega_{SI}(s) = \int_0^s r_{tSi} d\bar{s} + \omega_{0I} \quad \omega_{0I} = 0 \quad (\text{Symmetrie zur } x\text{-Achse})$$

$$\omega_{SiI}(s_i) = r_{tSi} s_i + \omega_{Si0I}$$

i	r_{tSi}	$\omega_{SiI}(s_i)$	x_i	y_i	$\omega_{MiI}(s_i)$
1	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} s_1$	$-\frac{a}{2}$	s_1	$-\frac{1}{2(3a+b)} (3a+2b) a s_1$
2	$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{2} s_2 + \frac{ab}{4}$	$-\frac{a}{2} + s_2$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{2(3a+b)} \left[-(3a+2b) \frac{ab}{2} + (3a+b) b s_2 \right]$
3	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} s_3 + \frac{3ab}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2} - s_3$	$\frac{1}{2(3a+b)} \left[\frac{3}{2} a^2 b + (9a+4b) a s_3 \right]$

Grafische Darstellung des Verlaufs $\omega_{SI}(s)$ für $b = 2a$:

(Verlauf $\omega_{MiI}(s)$ zum späteren Vergleich):



- Sektorzentrifugalmomente bezüglich des Schwerpunktes (3.39)

$$I_{x\omega} = \int_{(A)} x \omega_{SI} dA = h \int_{(I)} x \omega_{SI} ds = 0 \quad (\omega_{SI} \text{ antimetrisch zur } x\text{-Achse})$$

$$I_{y\omega} = \int_{(A)} y \omega_{SI} dA = h \int_{(I)} y \omega_{SI} ds$$

$$= 2h \left[\int_0^{\frac{b}{2}} s_1 \frac{a}{2} s_1 ds_1 + \int_0^a \frac{b}{2} \left(\frac{b}{2} s_2 + \frac{ab}{4} \right) ds_2 + \int_0^{\frac{b}{2}} \left(\frac{b}{2} - s_3 \right) \left(\frac{a}{2} s_3 + \frac{3}{4} ab \right) ds_3 \right]$$

$$= \frac{2a+b}{4} a b^2 h = 0,4 a^5 = 409,6 \cdot 10^5 \text{ mm}^5$$

- Koordinaten des Schubmittelpunktes M (3.40)

$$x_M = \frac{I_{x\omega} I_{xy} + I_{y\omega} I_{yy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} = \frac{I_{y\omega}}{I_{xx}} = \frac{\frac{2a+b}{4} a b^2 h}{\frac{1}{6} (3a+b) b^2 h} = \frac{3}{2} \frac{2a+b}{3a+b} a = \frac{6}{5} a = 48 \text{ mm}$$

$$y_M = -\frac{I_{y\omega} I_{xy} + I_{x\omega} I_{xx}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} = 0 \quad (\text{Symmetrie zur } x\text{-Achse})$$

- Einheitsverwölbung bezüglich des Schubmittelpunktes (3.17)

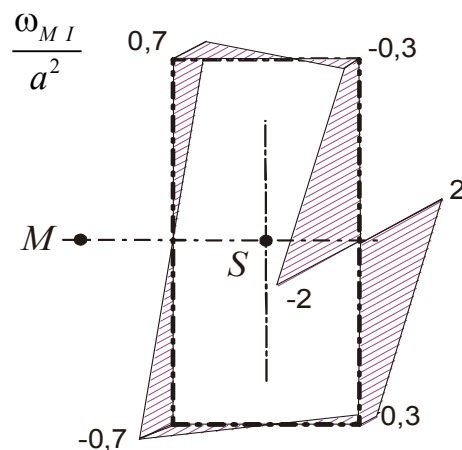
$$\begin{aligned} \omega_M &= \omega_S - x_M y + y_M x + k \\ \left. \begin{aligned} k &= 0 \\ y_M &= 0 \end{aligned} \right\} & (\text{Symmetrie zur } x\text{-Achse}) \end{aligned}$$

$$\omega_M = \omega_S - x_M y$$

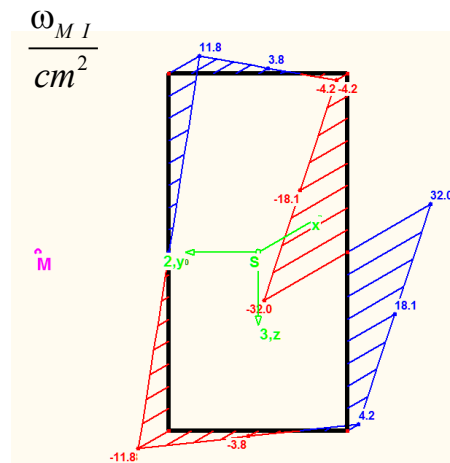
s. obige Tabelle (S. 113)

Grafische Darstellung der Funktion $\omega_{MI}(s_i)$ für $b = 2a$:

Analytisch:



DUENQ 6 mit: $a^2 = 16 \text{ cm}^2$:



- Sektoriell statisches Moment (3.38)

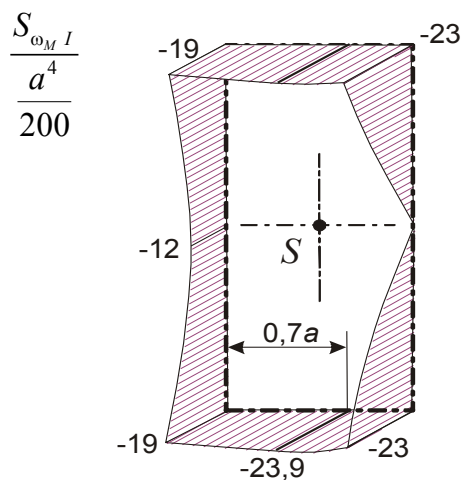
$$S_{\omega_{MI}}(s) = \int_{(A(s))} \omega_{MI} dA = \int_0^s \omega_{MI} h(\bar{s}) d\bar{s} + S_{\omega_{MI}}(s_1 = 0)$$

$$S_{\omega_{MI}}(s_1 = 0) \text{ folgt aus der Bedingung } S_{\omega_{MI}}(s_3 = \frac{b}{2}) = 0$$

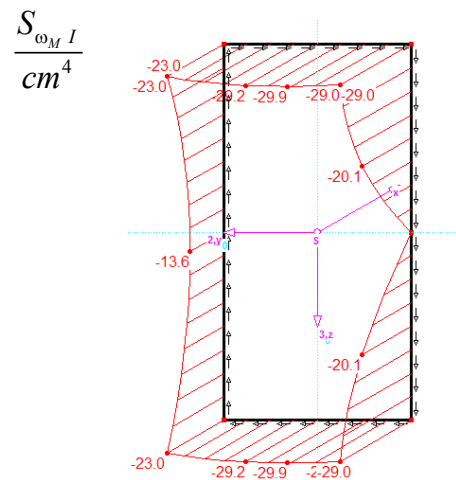
i	h_i	$S_{\omega_M^{iI}}(s_i)$
1	h	$-\frac{4a+b}{8(3a+b)}ab^2h - \frac{3a+2b}{4(3a+b)}ahs_1^2$ $= -\frac{ah}{16(3a+b)}[(4a+b)2b^2 + (3a+2b)4s_1^2]$
2	h	$-\frac{11a+4b}{16(3a+b)}ab^2h + \frac{bh}{4(3a+b)}[-(3a+2b)as_2 + (3a+b)s_2^2]$ $= \frac{bh}{16(3a+b)}[-(11a+4b)ab - (3a+2b)4as_2 + (3a+b)4s_2^2]$
3	h	$-\frac{15a+4b}{16(3a+b)}ab^2h + \frac{ah}{4(3a+b)}[3abs_3 + (9a+4b)s_3^2]$ $= \frac{ah}{16(3a+b)}[-(15a+4b)b^2 + 12abs_3 + (36a+16b)s_3^2]$

Grafische Darstellung $S_{\omega_M^I}$ für $b = 2a$:

Analytisch:



DUENQ 6 mit $\frac{a^4}{200} = 1,28 \text{ cm}^4$:



$$\frac{\partial S_{\omega_M^{2I}}}{\partial s_2} = \frac{bh}{4(3a+b)} [-(3a+2b)a + (3a+b)2s_2] = 0$$

$$s_{20} = \frac{3a+2b}{2(3a+b)}a = \frac{7}{10}a = 28 \text{ mm}$$

$$|S_{\omega_M^I}|_{\max} = |S_{\omega_M^{2I}}(s_{20})| = \frac{478}{400}a^3h = 30,59 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

- Wölbwiderstand (3.43)

$$I_{\omega\omega I} = \int_{(A)} \omega_{MI}^2 dA = 2h \frac{1}{4} \frac{1}{(3a+b)^2} \left[\begin{aligned} & a^2 \int_{s_1=0}^{\frac{b}{2}} (3a+2b)^2 s_1^2 ds_1 + \\ & + b^2 \int_{s_2=0}^a \left[(3a+2b) \frac{a}{2} - (3a+b) s_2 \right]^2 ds_2 + \\ & + a^2 \int_{s_3=0}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{3}{2} ab + (9a+4b) s_3 \right]^2 ds_3 \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{1}{24} \frac{a^2 b^2 h}{3a+b} (3a^2 + 34ab + 10b^2) = \frac{111}{300} a^6 = 1515 \cdot 10^6 \text{ mm}^6$$

- Abklingfaktor (3.53)

$$k = \sqrt{\frac{G I_t}{E I_{\omega\omega}}} \quad \text{mit: } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$k_I = \sqrt{\frac{I_{tI}}{2(1+\nu) I_{\omega\omega I}}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}(a+b)h^3}{2(1+\nu) \frac{1}{24} \frac{a^2 b^2 h}{3a+b} (3a^2 + 34ab + 10b^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{8(a+b)(3a+b)h^2}{(1+\nu)a^2 b^2 (3a^2 + 34ab + 10b^2)}} = \sqrt{\frac{3}{13 \cdot 111}} \frac{1}{a} = 0,0456 \frac{1}{a} = 1,14 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$$

$$k_I l = 0,4560$$

$$e^{-k_I l} = 0,6338$$

$$e^{-2k_I l} = 0,4017$$

Querschnittskennwerte geschlossenes Profil (Fall II)

- Torsionsträgheitsmoment (3.34)

$$I_{tII} = \frac{4 A_m^2}{\circ) \quad)} = \frac{4 a^2 b^2 h}{a+b} = \frac{2 a^2 b^2 h}{15} = \frac{4}{15} a^4 = 68,27 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

- Widerstandsmoment (3.32)

$$W_{tII} = 2 A_m h_{min} = 2 a b h = 0,4 a^3 = 25,6 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

- Einheitsverwölbung bezüglich des Schubmittelpunktes (Schwerpunktes) (3.35)

$$\omega_{M II}(s) = \int_0^s r_{tM}(\bar{s}) d\bar{s} - \frac{I_t}{2 A_m} \int_0^s \frac{d\bar{s}}{h(\bar{s})} + \omega_{M 0 II}$$

mit: $\omega_{M 0 II} = 0$ (Symmetrie)

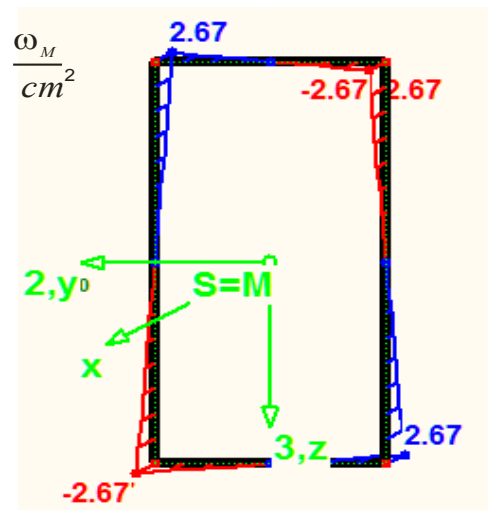
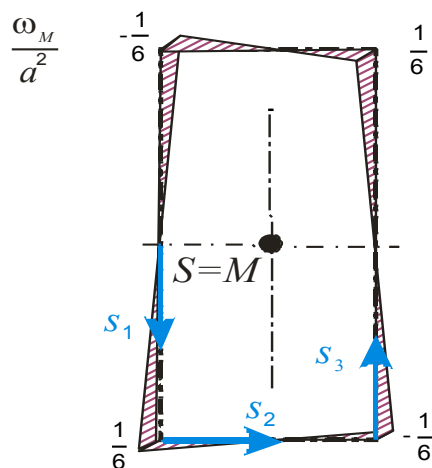
$$\omega_{Mi II}(s_i) = r_{tMi} s_i - \frac{4 A_m^2 h}{2(a+b) 2 A_m h} s_i + \omega_{Mi 0 II}$$

$$\omega_{Mi II}(s_i) = \left(r_{tMi} - \frac{a b}{a+b} \right) s_i + \omega_{Mi 0 II}$$

i	r_{tMi}	$\omega_{Mi II}(s_i)$	$\omega_{Mi II}(s_i)$ für $b=2a$
1	$\frac{a}{2}$	$\frac{a-b}{a+b} \frac{a}{2} s_1$	$-\frac{a}{6} s_1$
2	$\frac{b}{2}$	$\frac{a-b}{a+b} \frac{b}{2} \left(\frac{a}{2} - s_2 \right)$	$-\frac{a}{3} \left(\frac{a}{2} - s_2 \right)$
3	$\frac{a}{2}$	$-\frac{a}{2} \frac{a-b}{a+b} \left(\frac{b}{2} - s_3 \right)$	$\frac{a}{6} (a - s_3)$

Grafische Darstellung der Funktion $\omega_{M II}(s)$:

Analytisch: DUENQ 6 mit $\frac{a^2}{6} = 2,67 \text{ cm}^2$:



- Sektoriell statisches Moment (analog (3.38))

$$S_{\omega_{M II}} = \int_{(A(s))} \omega_{M II} dA = \int_0^s \omega_{M II} h(\bar{s}) d\bar{s}$$

i	h_i	$S_{\omega_M i II}(s_i)$	$S_{\omega_M i II}(s_i)$ für $b = 2a$
1	h	$\frac{a-b}{a+b} \frac{a h}{4} s_1^2$	$-\frac{a^4}{120} \frac{s_1^2}{a^2}$
2	h	$\frac{a-b}{a+b} \frac{a b^2 h}{16} \frac{a-b}{a+b} \frac{b h}{4} (a s_2 - s_2^2)$ $= \frac{a-b}{a+b} \frac{b h}{4} \left(\frac{a b}{4} + a s_2 - s_2^2 \right)$	$-\frac{a^4}{120} \left(1 + 2 \frac{s_2}{a} - 2 \frac{s_2^2}{a^2} \right)$
3	h	$\frac{a-b}{a+b} \frac{a b^2 h}{16} - \frac{a h}{4} \frac{a-b}{a+b} (b s_3 - s_3^2)$ $= \frac{a-b}{a+b} \frac{a h}{4} \left(\frac{b^2}{16} - b s_3 + s_3^2 \right)$	$-\frac{a^4}{120} \left(1 - 2 \frac{s_3}{a} + \frac{s_3^2}{a^2} \right)$

--- allgemein:

Die Wölbschubspannungen sind für ein **geschlossenes** Profil durch einen zusätzlichen Term $\Delta\tau_\omega$ (analog der Spannungsberechnung beim Querkraftschub s. S. 77 ff) zu ergänzen:

$$\tau_\omega = E \varphi''' \frac{1}{h} S_{\omega_M} + \Delta\tau_\omega. \quad (3.57)$$

Er wird über die analoge Aussage zur Verformung gewonnen:

○

$$\left(\tau_\omega + \Delta\tau_\omega \right) \frac{1}{G} ds = 0$$

$$\Delta\tau_\omega = -E \varphi'''$$

(3.58)

--- speziell:

$$\Delta\tau_\omega = -E \varphi''' \frac{1}{h} S_{\omega_M} ds$$

$$\tau_\omega = E \varphi''' S_{\omega_M} \frac{1}{h} - E \varphi''' \frac{1}{h}$$

$$\tau_\omega = E \varphi''' \frac{1}{h} \left(S_{\omega_M} - \underbrace{\quad}_{S_{\omega_M}^{\sim}} \right)$$

(3.59)

Der zweite Term in (3.59) ist noch bereitzustellen:

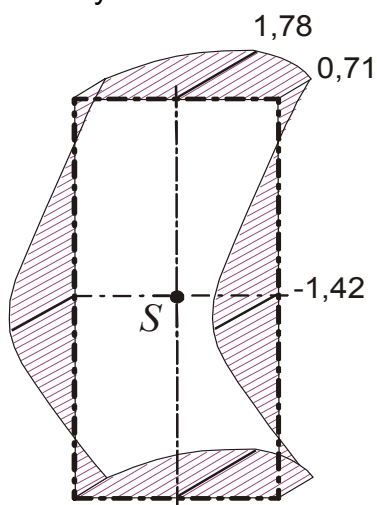
$$\begin{aligned} \oint S_{MII} ds &= \left[\int_{s_1=0}^{\frac{b}{2}} S_{\omega_{MII}1} ds_1 + \int_{s_2=0}^{\frac{a}{2}} S_{\omega_{MII}2} ds_2 \right] \\ &= \frac{a-b}{a+b} \frac{a b h}{4} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{6} + \frac{a b}{2} \right) = -\frac{a^5}{30} \\ \oint S_{MI} ds &= \frac{a^5}{180} = -1,422 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ \oint ds &= a \end{aligned}$$

Das damit berechnete $S_{\omega_{MII}}^G(s_i)$ ist in der folgenden Tabelle für $b=2a$ eingetragen:

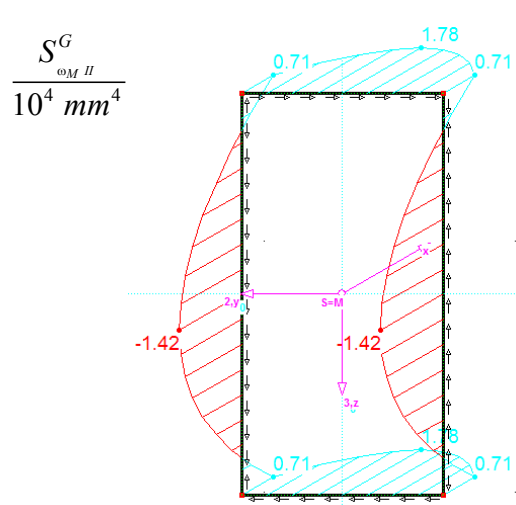
i	$S_{\omega_{MII}}^G(s_i)$ für $b=2a=80 \text{ mm}$
1	$\frac{a^4}{120} \left(\frac{s_1^2}{a^2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{15} \left(\frac{s_1^2}{a^2} - \frac{2}{3} \right) 10^4 \text{ mm}^4$
2	$\frac{a^4}{120} \left(\frac{1}{3} + 2 \frac{s_2}{a} - 2 \frac{s_2^2}{a^2} \right) = \frac{32}{15} \left(\frac{1}{3} + 2 \frac{s_2}{a} - 2 \frac{s_2^2}{a^2} \right) 10^4 \text{ mm}^4$
3	$\frac{a^4}{120} \left(\frac{1}{3} - 2 \frac{s_3}{a} + \frac{s_3^2}{a^2} \right) = \frac{32}{15} \left(\frac{1}{3} - 2 \frac{s_3}{a} + \frac{s_3^2}{a^2} \right) 10^4 \text{ mm}^4$

Grafische Darstellung $S_{\omega_{MII}}^G(s)$ für $b=2a$:

Analytisch



DUENQ 6



- Wölbwiderstand (3.43)

$$I_{\omega\omega II} = \int_{(A)} \omega_{M II}^2 dA = \frac{a^2 b^2 h}{24} \frac{(b-a)^2}{a+b} = \frac{a^6}{180} = 22,76 \cdot 10^6 \text{ mm}^6$$

- Abklingfaktor (s. o.)

$$\begin{aligned} k_{II} &= \sqrt{\frac{I_{t II}}{2(1+\nu) I_{\omega\omega II}}} = \sqrt{\frac{\frac{2 a^2 b^2 h}{a+b}}{2(1+\nu) \frac{a^2 b^2 h (b-a)^2}{24(a+b)}}} \\ &= \sqrt{\frac{24}{(1+\nu)(b-a)^2}} = \sqrt{\frac{240}{13} \frac{1}{a}} = 4,30 \frac{1}{a} = 0,107 \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

$$k_{II} l = 43$$

$$e^{-k_{II} l} \approx 0$$

$$e^{-2 k_{II} l} \approx 0$$

Verhältnisse der Trägheitsmomente, Widerstandsmomente, Wölbwiderstände und Abklingfaktoren

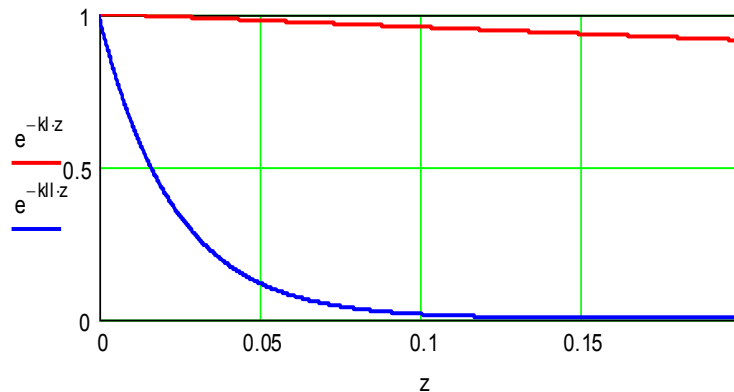
$$\frac{I_{t II}}{I_{t I}} = \frac{\frac{2 a^2 b^2 h}{a+b}}{\frac{2}{3}(a+b) h^3} = 3 \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2 h^2} = \frac{4}{3} \frac{a^2}{h^2} = \frac{400}{3} = 133,3$$

$$\frac{W_{t II}}{W_{t I}} = \frac{\frac{2 a b h}{a+b}}{\frac{2}{3}(a+b) h^2} = 3 \frac{a b}{(a+b) h} = 20$$

$$\frac{I_{\omega\omega I}}{I_{\omega\omega II}} = \frac{\frac{1}{24} \frac{a^2 b^2 h}{3 a+b} (3 a^2 + 34 a b + 10 b^2)}{\frac{a^2 b^2 h (b-a)^2}{24(a+b)}} = \frac{a+b}{(3 a+b)(b-a)^2} (3 a^2 + 34 a b + 10 b^2) = \frac{333}{5} = 66,6$$

$$\frac{k_{II}}{k_I} = \sqrt{\frac{I_{t II}}{I_{t I}} \frac{I_{\omega\omega I}}{I_{\omega\omega II}}} = \sqrt{8880} = 94,2$$

Grafische Darstellung des Abklingverhaltens der Zusatzspannungen beim **offenen** und beim **geschlossenen** Profil:



$$z := 0, 0.0001 \cdot 1$$

Verhältnisse der Spannungen auf Grund der reinen Torsion und der Drillungen

$$\tau_{sv \max I} = \frac{M_t}{W_{tI}} \quad \tau_{sv \max II} = \frac{M_t}{W_{tII}}$$

$$\frac{\tau_{sv \max I}}{\tau_{sv \max II}} = \frac{W_{tII}}{W_{tI}} = 20$$

$$\vartheta_I = \frac{M_t}{G I_{tI}} \quad \vartheta_{II} = \frac{M_t}{G I_{tII}}$$

$$\frac{\vartheta_I}{\vartheta_{II}} = \frac{I_{tII}}{I_{tI}} = 133,3$$

Lösung der Torsions-Differenzialgleichung (3.52)

$$\varphi''' - k^2 \varphi' = -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega_M}} \quad k^2 = \frac{G I_t}{E I_{\omega\omega_M}}$$

Homogene Lösung:

$$\varphi_h = \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i z}$$

$$\lambda_i^3 - k^2 \lambda_i = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_i^2 = k^2$$

$$\lambda_{2,3} = \pm k$$

$$\varphi_h(z) = B_1 + B_2 e^{-kz} + B_3 e^{-k(l-z)}$$

Partikuläre Lösung:

$$\varphi_p = C z$$

$$-k^2 C = -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega_M}}$$

$$C = \frac{M_t}{k^2 E I_{\omega\omega_M}}$$

$$\varphi_p = \frac{M_t}{k^2 E I_{\omega\omega_M}} z = \frac{M_t}{G I_t} z$$

Allgemeine Lösung und deren Ableitungen:

$$\varphi(z) = B_1 + B_2 e^{-kz} + B_3 e^{-k(l-z)} + \frac{M_t}{G I_t} z$$

$$\varphi'(z) = -k B_2 e^{-kz} + k B_3 e^{-k(l-z)} + \frac{M_t}{G I_t}$$

$$\varphi''(z) = k^2 B_2 e^{-kz} + k^2 B_3 e^{-k(l-z)}$$

Randbedingungen, Konstanten:

$$\begin{array}{ll} \varphi(0) = 0 & B_1 + B_2 + B_3 e^{-kl} = 0 \\ \varphi'(0) = 0 & -B_2 + B_3 e^{-kl} + \frac{M_t}{k G I_t} = 0 \\ \varphi''(l) = 0 & B_2 e^{-kl} + B_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} B_1 = -\frac{M_t}{k G I_t} \frac{1 - e^{-2kl}}{1 + e^{-2kl}} \\ B_2 = \frac{M_t}{k G I_t} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \\ B_3 = -\frac{M_t}{k G I_t} \frac{e^{-kl}}{1 + e^{-2kl}} \end{array}$$

Spezielle Lösung:

$$\varphi(z) = \frac{M_t}{k G I_t} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \left[-1 + e^{-2kl} + e^{-kz} - e^{-k(2l-z)} + k z (1 + e^{-2kl}) \right]$$

$$\varphi'(z) = \frac{M_t}{G I_t} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \left[1 + e^{-2kl} - e^{-kz} - e^{-k(2l-z)} \right]$$

$$\varphi''(z) = \frac{M_t k}{G I_t} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \left[e^{-kz} - e^{-k(2l-z)} \right]$$

$$\varphi'''(z) = \frac{M_t}{E I_{\omega\omega}} \frac{1}{1 + e^{-2kl}} \left[-e^{-kz} - e^{-k(2l-z)} \right]$$

Spezielle Werte:

$$\begin{array}{ll} \varphi(0) = 0 & \varphi(l) = \frac{M_t l}{G I_t} \left[\frac{-1 + e^{-2kl}}{kl (1 + e^{-2kl})} + 1 \right] \\ \varphi'(0) = 0 & \varphi'(l) = \frac{M_t}{G I_t} \frac{(1 - e^{-kl})^2}{1 + e^{-2kl}} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\varphi''(0) &= \frac{M_t k}{G I_t} \frac{1 - e^{-2kl}}{1 + e^{-2kl}} & \varphi''(l) &= 0 \\ \varphi'''(0) &= -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega}} & \varphi'''(l) &= -\frac{M_t}{E I_{\omega\omega}} \frac{2 e^{-kl}}{1 + e^{-2kl}}\end{aligned}$$

Verhältnisse der Zusatzspannungen auf Grund der Wölbtorsion

- Zusatznormalspannung (3.41)

$$\sigma_{\omega} = -E \varphi'' \omega_M$$

In der Einspannung ($z = 0$) gilt:

$$\frac{\sigma_{\omega I}}{\sigma_{\omega II}} = \frac{k_I}{k_{II}} \frac{I_{tII}}{I_{tI}} \frac{1 - e^{-2k_I l}}{1 - e^{-2k_{II} l}} \frac{1 + e^{-2k_{II} l}}{1 + e^{-2k_I l}} \frac{\omega_{MI}}{\omega_{MII}} = \frac{133,3}{94,2} 0,427 \frac{\omega_{MI}}{\omega_{MII}} = 0,604 \frac{\omega_{MI}}{\omega_{MII}}$$

Die Maxima der Beträge der Verwölbungen treten an **unterschiedlichen** Stellen im Querschnitt auf!

$$|\omega_{MI}|_{\max} = 2 a^2$$

$$|\omega_{MII}|_{\max} = \frac{a^2}{6}$$

$$\frac{|\sigma_{\omega I}|_{\max}}{|\sigma_{\omega II}|_{\max}} = 0,604 \frac{2}{\frac{1}{6}} = 7,25$$

- Zusatzschubspannung (3.47)

$$\tau_{\omega} = E \varphi''' S_{\omega_M}(s) \frac{1}{h(s)}$$

In der Einspannung ($z = 0$) gilt:

$$\frac{\tau_{\omega I}}{\tau_{\omega II}} = \left(\frac{k_I}{k_{II}} \right)^2 \frac{I_{tII}}{I_{tI}} \frac{S_{\omega_{MI}}(s)}{S_{\omega_{MII}}^G(s)} = \frac{133,3}{8880} \frac{S_{\omega_{MI}}(s)}{S_{\omega_{MII}}^G(s)} = 0,015 \frac{S_{\omega_{MI}}(s)}{S_{\omega_{MII}}^G(s)}$$

Die Maxima der Beträge der sektoriellen statischen Momente treten an **unterschiedlichen** Stellen im Querschnitt auf!

$$\left| S_{\omega_M I} \right|_{\max} = 30,6 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\left| S_{\omega_M II}^G \right|_{\max} = 1,78 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\frac{\left| \tau_{\omega I} \right|_{\max}}{\left| \tau_{\omega II} \right|_{\max}} = 0,015 \frac{30,6}{1,78} = 0,258$$

Ergebnistabellen (Original) der Rechnung mit dem Programm DUENQ6

- Offenes Profil

Bezeichnung	Symbol	Größe	Einheit	Kommentar
Querschnittsfläche	A	9,6	cm ²	
Lage des Schwerpunktes	yS,0	2,00	cm	bezogen auf Nullpunkt
	zS,0	4,00	cm	
Trägheitsmomente	Iy	85,63	cm ⁴	bezogen auf Schwerachsen y, z
	Iz	30,08	cm ⁴	
	Iyz	0,00	cm ⁴	
Hauptachseneckwinkel	a	0,00	°	positiv im Uhrzeigersinn
Hauptträgheitsmomente	I2	85,63	cm ⁴	bezogen auf die Hauptachsen 2, 3 im S
	I3	30,08	cm ⁴	
Polare Trägheitsmomente	Ip	115,71	cm ⁴	
	Ip,M	335,34	cm ⁴	bezogen auf Schubmittelpunkt M
Torsionsträgheitsmoment	It	0,51	cm ⁴	
Sekundäres Torsionsträgheitsm.	It,s	71,14	cm ⁴	
Lage des Schubmittelpunktes	yM,0	-2,78	cm	bezogen auf Nullpunkt
	zM,0	4,00	cm	
	yM	-4,78	cm	bezogen auf Schwerpunkt
	zM	0,00	cm	
Wölbwiderstände	Io,S	3481,08	cm ⁶	bezogen auf Schwerpunkt
	Io,M	1515,09	cm ⁶	bezogen auf Schubmittelpunkt
Hilfswert für Wölbverdrehung	ro,M	0,00		
Wölbwiderstandsmomente	Wo,M,max	47,35	cm ⁴	im Knoten 6
	Wo,M,min	-47,35	cm ⁴	im Knoten 5
Abklingfaktor	IM	0,0114	1/cm	

- Geschlossenes Profil

Bezeichnung	Symbol	Größe	Einheit	Kommentar
Querschnittsfläche	A	9,60	cm ²	
Lage des Schwerpunktes	$y_{S,0}$	2,00	cm	bezogen auf Nullpunkt
	$z_{S,0}$	4,00	cm	
Trägheitsmomente	I_y	85,63	cm ⁴	bezogen auf Schwerachsen y, z
	I_z	30,08	cm ⁴	
	I_{yz}	0,00	cm ⁴	
Hauptachsendifferenzwinkel	α	0,00	°	positiv im Uhrzeigersinn
Hauptträgheitsmomente	I_2	85,63	cm ⁴	bezogen auf die Hauptachsen 2, 3 im S
	I_3	30,08	cm ⁴	
Polare Trägheitsmomente	I_p	115,71	cm ⁴	
	$I_{p,M}$	115,71	cm ⁴	bezogen auf Schubmittelpunkt M
Torsionsträgheitsmoment	I_t	68,78	cm ⁴	
- Anteil aus St.Venant	$I_{t,St.Ven.}$	0,51	cm ⁴	
- Anteil aus Bredt	$I_{t,Bredt}$	68,27	cm ⁴	
Sekundäres Torsionsträgheitsm.	$I_{t,s}$	6,56	cm ⁴	
Lage des Schubmittelpunktes	$y_{M,0}$	2,00	cm	bezogen auf Nullpunkt
	$z_{M,0}$	4,00	cm	
	y_M	0,00	cm	bezogen auf Schwerpunkt
	z_M	0,00	cm	
Wölbwiderstände	$I_{o,S}$	22,76	cm ⁶	bezogen auf Schwerpunkt
	$I_{o,M}$	22,76	cm ⁶	bezogen auf Schubmittelpunkt
Hilfswert für Wölbverdrehung	$r_{o,M}$	0,00		
Wölbwiderstandsmomente	$W_{o,M,max}$	8,53	cm ⁴	im Knoten 3
	$W_{o,M,min}$	-8,53	cm ⁴	im Knoten 2
Abklingfaktor	λ_M	1,079	1/cm	

Schlussfolgerungen

- Die Einheitsverwölbung eines offenen Profils ist deutlich größer als in einem gleichartigen geschlossenen Profil.
- Drillung und Spannung auf Grund der reinen Torsion sind beim offenen Profil wesentlich größer.
- Der Abklingfaktor beim geschlossenen Profil ist wesentlich größer.
- Auf Grund der größeren Einheitsverwölbung und des kleineren Abklingfaktors sind die Zusatzspannungen beim offenen Profil wesentlich größer als beim geschlossenen.

Zugabe

Spannungen im offenen Profil

Reine Torsion:

$$\tau_I = \frac{M_t}{W_{tI}} = \frac{M_t}{\frac{2}{3}(a+b)h^2} = 150 \frac{M_t}{a^3} = \text{konst.}$$

$$\varphi_I(l) = \frac{M_t l}{G I_{tI}} = \frac{M_t l}{G \frac{2}{3}(a+b)h^3} = 5000 \frac{M_t}{G a^3}$$

Wölbtorsion:

$$\begin{aligned} |\sigma_{\omega I}|_{\max} &= \left| \sigma_{\omega I}(s_3 = \frac{b}{2}; z = 0) = E \varphi''(0) \omega_{MI}(s_3 = \frac{b}{2}) \right| = \left| \frac{3 M_t k_I (1+\nu)}{(a+b)h^3} \omega_{MI}(s_3 = \frac{b}{2}) \right| \\ &= \frac{M_t k_I (1+\nu)}{h^3} 2a = 118,56 \frac{M_t}{a^3} \\ |\tau_{\omega I}|_{\max} &= \left| \tau_{\omega I}(s_2 = \frac{7}{10}a; z = 0) \right| = \left| E \varphi'''(0) S_{\omega I}(s_2 = \frac{7}{10}a) \frac{1}{h} \right| = \frac{487}{400} \frac{M_t a^3}{I_{\omega I}} \\ &= \frac{487}{400} \frac{300}{111} \frac{M_t}{a^3} = 3,29 \frac{M_t}{a^3} \end{aligned}$$

Spannungen im geschlossenen Profil

Reine Torsion:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2 A_m h_{\min}} = \frac{M_t}{2 a b h} = \frac{5}{2} \frac{M_t}{a^3} = \text{konst.}$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{4 A_m^2 G} \circ \quad \frac{1+b}{b^2 h} = \frac{M_t (a+b)}{2 G a^2 b^2 h} = \frac{15}{4} \frac{M_t}{G a^4} =$$

Wölbtorsion:

$$\begin{aligned} |\sigma_{\omega II}|_{\max} &= \left| \sigma_{\omega II}(s_3 = \frac{b}{2}; z = 0) = E \varphi''(0) \omega_{MII}(s_3 = \frac{b}{2}) \right| = \left| \frac{3 M_t k_{II} (1+\nu)}{(a+b)h^3} \omega_{MII}(s_3 = \frac{b}{2}) \right| \\ &= \frac{M_t k_{II} (1+\nu)}{h^3} 2a = 118,56 \frac{M_t}{a^3} \end{aligned}$$

$$\tau_{\omega 0} = E \varphi'''(0) \circ \quad \frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\omega II} &= -E \varphi''' S_{\omega M II} \frac{1}{h} + \tau_{\omega 0} = -E \varphi''' S_{\omega M II} \frac{1}{h} - E \varphi''' \frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) \\
&= -E \varphi''' \left[\frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) + \right] S_{\omega M II} \frac{1}{h} \\
\tau_{\omega 1 II} &= -E \varphi''' \left[\frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) - \frac{a-b}{a+b} \frac{a}{4} s_1^2 \right] \\
&= -E \varphi''' \frac{a^3}{12} \left[-\frac{1}{36} + \frac{s_1^2}{a^2} \right] \\
\tau_{\omega 2 II} &= -E \varphi''' \left[\frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) - \frac{a-b}{a+b} \frac{b}{4} \left(\frac{a b}{4} + a s_2 - s_2^2 \right) \right] \\
&= -E \varphi''' \frac{a^3}{12} \left[\frac{35}{36} + 2 \frac{s_2}{a} - 2 \frac{s_2^2}{a^2} \right] \\
\tau_{\omega 3 II} &= -E \varphi''' \left[\frac{a-b}{(a+b)^2} \frac{b h}{16} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{12} + \frac{a b}{2} \right) + \frac{a-b}{a+b} \frac{a}{4} \left(-\frac{b^2}{16} + b s_3 - s_3^2 \right) \right] \\
&= -E \varphi''' \frac{a^3}{12} \left[\frac{2}{9} - 2 \frac{s_3}{a} + \frac{s_3^2}{a^2} \right] = \frac{M_t}{a^3} = \frac{M_t}{a^3}
\end{aligned}$$