

2 Torsion in dünnwandigen Querschnitten

2.1 Theorien, Voraussetzungen und Hypothesen

Theorien:

- Reine Torsion (s. Grundstufe)
Begründer: Jean Claude de ST. VENANT (1797 - 1886)
Symbol, Index: sv
- Wölbtorsion
Begründer: Vasili Sacharovitsch VLASOV (1906 – 1958)
Symbol, Index : ω

Voraussetzungen zu Geometrie und Belastung:

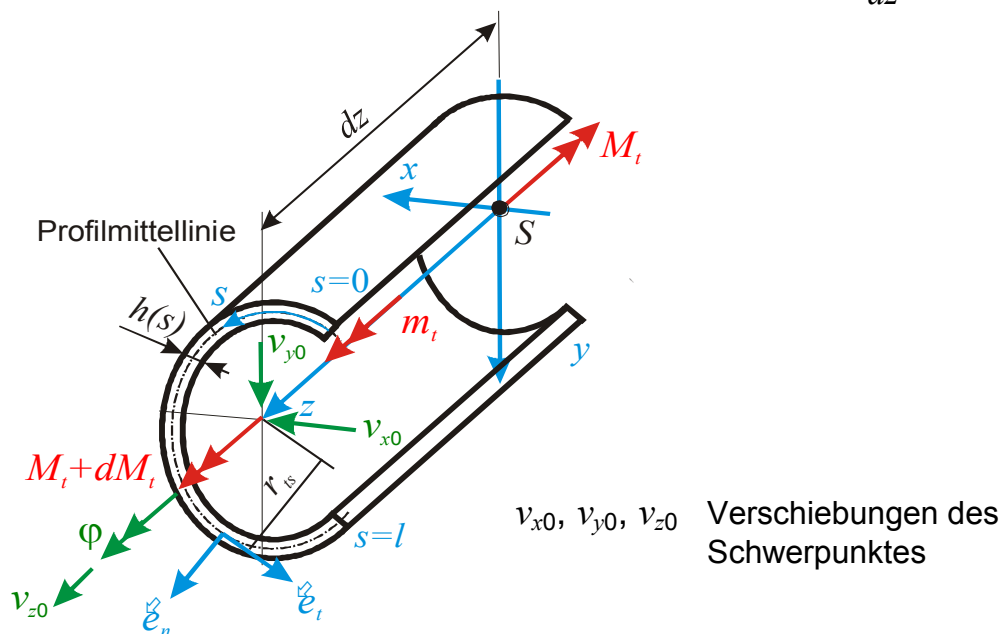
prismatische Stäbe

Wanddicke h klein gegenüber restlichen Abmessungen des Querschnitts –
Stabschale

Torsionsmoment M_t um Stabachse

sv : M_t an Stabenden eingeleitet, über Stablänge konstant

ω : M_t kann über Stablänge veränderlich sein: $m_t = \frac{dM_t}{dz}$



Hypothesen:

- Kinematische Hypothesen (Annahmen bezüglich der Verformung):
Verformung der Querschnitte durch die Verformung der Profilmittellinie beschrieben. Änderungen über die Wandstärke werden vernachlässigt
keine Änderung der Querschnittsform: $\gamma_{xy} = 0$
Stab in z -Richtung Schubstarr: $\gamma_{zs} = 0$
Querschnitt in seiner Querschnittsebene nicht starr
→ Querschnittsverwölbung $v_{z\omega}$

Verschiebungen

Verschiebungen des beliebigen Punktes $P(x,y,z)$ in der x,y -Ebene:

$$\begin{aligned} v_x(y,z) &= v_{x0}(z) - \varphi(z) y \\ v_y(x,z) &= v_{y0}(z) + \varphi(z) x \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da die Verschiebungen des Drehpunktes (Drillruhepunktes) D in der x,y -Ebene verschwinden müssen:

$$\begin{aligned} v_{xD} &= v_{x0} - \varphi y_D = 0 \\ v_{yD} &= v_{y0} + \varphi x_D = 0 \end{aligned} ,$$

ergeben sich die Verschiebungen des Schwerpunktes S zu:

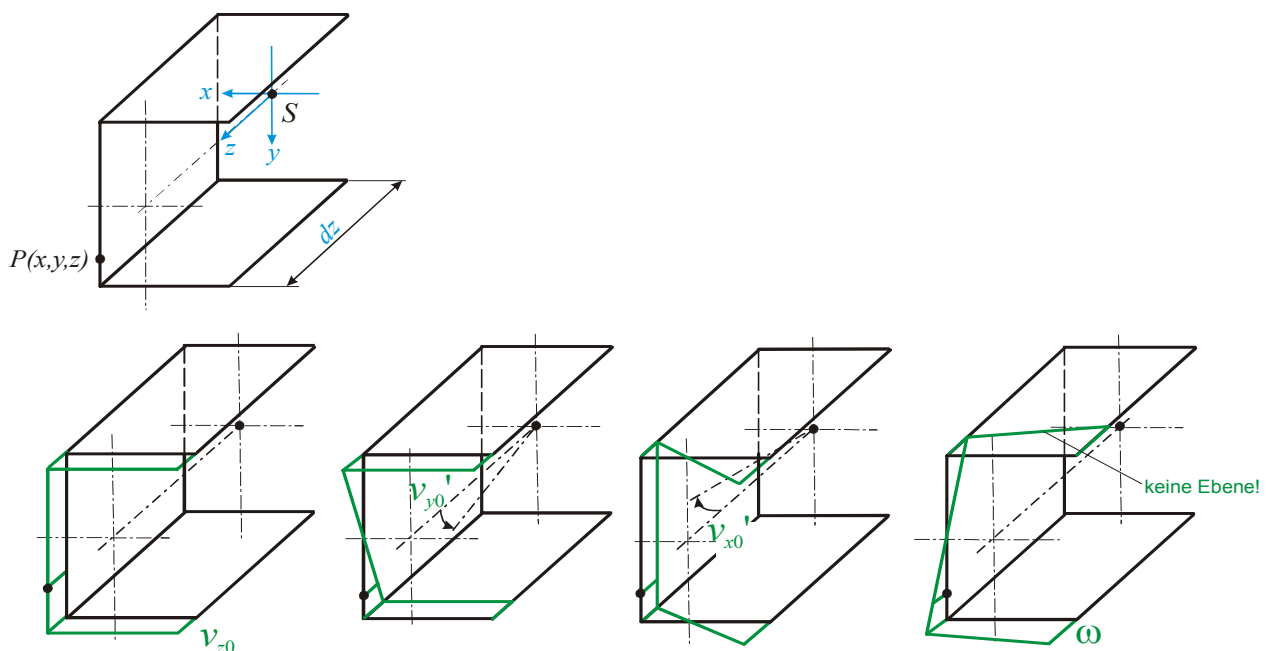
$$\begin{aligned} v_{x0} &= \varphi y_D \\ v_{y0} &= -\varphi x_D \end{aligned} \quad (3.9)$$

(3.9) in (3.8) formuliert endgültig die raumfesten Verschiebungen des Punktes P :

$$\begin{aligned} v_x &= -\varphi (y - y_D) = -\varphi \bar{y} \\ v_y &= +\varphi (x - x_D) = +\varphi \bar{x} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Verschiebungen des beliebigen Punktes P in **Stablängsrichtung**:

z. B. am U-Profil:



$$v_z(x,y,z) = v_{z0}(z) + \underbrace{\underbrace{\text{Verschiebung wegen Drehung um } y\text{-Achse}}_{\text{BERNOULLI-Hypothese}} + \underbrace{\text{Verschiebung wegen Drehung um } x\text{-Achse}}_{\text{BERNOULLI-Hypothese}} + \underbrace{\text{Verschiebung wegen Verwölbung des Querschnitts}}_{\text{BERNOULLI-Hypothese}}$$

(3.11)

Verzerrungen

$$\varepsilon_{xx} = v_{x,x} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = v_{y,y} = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} = v_{z,z} &= v_{z0}'(z) - v_{y0}''(z) y - v_{x0}''(z) x - \varphi''(z) \omega(x, y) \\ &= v_{z0}'(z) - \varphi''(z) [y_D x - x_D y + \omega(x, y)] \quad (\text{mit (3.9)}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\gamma_{xy} = v_{x,y} + v_{y,x} = -\varphi + \varphi = 0$$

$$\gamma_{xz} = v_{x,z} + v_{z,x} = \cancel{v_{x0}'(z)} - \varphi'(z) y - \cancel{v_{x0}'(z)} - \varphi'(z) \omega_{,x} = -(y + \omega_{,x}) \varphi'(z)$$

$$\gamma_{yz} = v_{y,z} + v_{z,y} = \cancel{v_{y0}'(z)} + \varphi'(z) x - \cancel{v_{y0}'(z)} - \varphi'(z) \omega_{,y} = (x - \omega_{,y}) \varphi'(z)$$

Für die weitere Behandlung werden noch folgende Zusammenhänge zwischen den Verformungen bereitgestellt:

Zusammenhang raumfeste – körperfeste Verschiebungen:

$$v_n = +v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha$$

$$v_t = -v_x \sin \alpha + v_y \cos \alpha$$

Einsetzen der Verschiebungen nach (3.10):

$$v_n = -\varphi (y - y_D) \cos \alpha + \varphi (x - x_D) \sin \alpha$$

$$v_t = +\varphi (y - y_D) \sin \alpha + \varphi (x - x_D) \cos \alpha$$

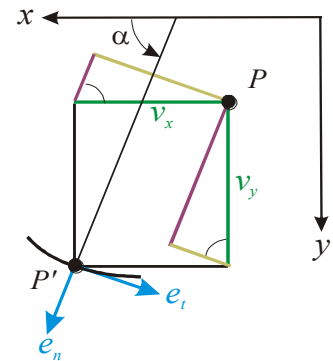
oder (s. Skizze S. 88):

$$v_n = r_{nD} \varphi$$

$$v_t = r_{tD} \varphi$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} r_{nD}(x, y) &= r_{nS} - x_D \sin \alpha + y_D \cos \alpha \\ r_{tD}(x, y) &= r_{tS} - x_D \cos \alpha - y_D \sin \alpha \end{aligned} \right\} \text{ z-unabhängige Querschnittskenngrößen} \quad (3.13)$$



Verwölbung

Die Hypothese

$$\gamma_{zs} = v_{t,z} + v_{z\omega,s} = 0$$

liefert mit obigem v_t :

$$v_{z\omega,s} = -v_{t,z} = -r_{tD} \varphi' = -r_{tD} \vartheta \quad ,$$

und nach Integration über s :

$$v_{z\omega} = -\vartheta \int_0^s r_{tD} d\bar{s} + v_{z\omega 0} \quad .$$

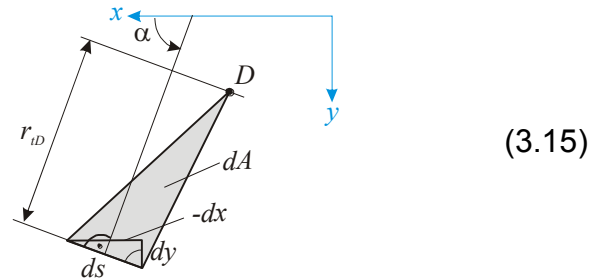
Damit wird die **Einheitsverwölbung** ω_D (bezüglich des Punktes D) definiert:

$$\omega_D(s) = -\frac{v_{z\omega}}{\vartheta} = \int_0^s r_{tD} d\bar{s} + \omega_{D0} \quad \omega_{D0} \text{ Einheitsverwölbung an der Stelle } s = 0 \quad (3.14)$$

Die Einheitsverwölbung hängt nur von der Geometrie des Stabquerschnittes ab!

Das Integral $\int_0^s r_{tD} d\bar{s}$ kann wieder (s. auch S. 83) anschaulich (s. Skizze) gedeutet werden:

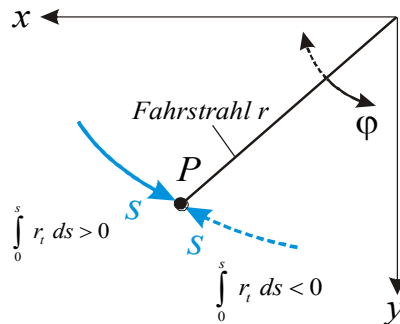
$$dA = \frac{1}{2} r_{tD} ds$$



Das Differenzial der Einheitsverwölbung ist danach gleich dem doppelten Flächeninhalt der Sektorfläche.

Daher stammt die Bezeichnung „Sektorkoordinate“ für die Einheitsverwölbung.

Bei der Auswertung des Integrals ist zu beachten, dass es dann positiv ist, wenn der Fahrstrahl r zur Profilmittellinie bei Zunahme von s in Richtung von φ dreht.



Transformationsbeziehung zwischen den Einheitsverwölbungen bezüglich verschiedener Bezugspunkte

Formal kann die Einheitsverwölbung für einen *beliebigen* Bezugspunkt (hier: Schwerpunkt) geschrieben werden:

$$\omega = \int_0^s r_t d\bar{s} + \omega_0$$

(Wegen der freien Wahl des Bezugspunktes wurde auf die Indizierung mit S verzichtet.)

Mit der Beziehung für r_t (3.13) wird das Integral für die Einheitsverwölbung neu geschrieben:

$$\omega = \int_0^s r_t d\bar{s} + \omega_0 = \int_0^s r_{tD} d\bar{s} + x_D \int_0^s \cos \alpha d\bar{s} + y_D \int_0^s \sin \alpha d\bar{s} + \omega_0$$

Hierin werden die Winkelfunktionen durch die aus dem ersten Bild auf dieser Seite ablesbaren Beziehungen:

$$\sin \alpha = -\frac{dx}{ds} \quad \cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad (3.16)$$

ersetzt:

$$\begin{aligned}
\omega &= \int_0^s r_{iD} d\bar{s} + x_D \int_{y_0}^y d\bar{y} - y_D \int_{x_0}^x d\bar{x} + \omega_0 \\
&= \omega_D - \omega_{D0} + x_D (y - y_0) - y_D (x - x_0) + \omega_0 \\
\omega &= \omega_D + x_D y - y_D x + k \quad \text{mit:} \quad k = \omega_0 - \omega_{D0} - x_D y_0 + y_D x_0 \quad . \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Bei Kenntnis des Verlaufs der Einheitsverwölbungen bezüglich zweier „Dreh“punkte eines Querschnittes lassen sich über die Wertepaare an jeweils drei Stellen des Querschnittes die Koordinaten seines Drehpunktes $D(x_D, y_D)$ und die Konstante k ermitteln.

Für die spätere Verwendung werden noch die partiellen Ableitungen von (3.17) bereitgestellt:

$$\begin{aligned}
\omega_{,x} &= \omega_{D,x} - y_D \\
\omega_{,y} &= \omega_{D,y} + x_D \quad . \quad (3.17a)
\end{aligned}$$

Praktische Hinweise

Die Verwölbung ist eine *antimetrische* Querschnittsgröße. Auf geometrischen Symmetrieachsen verschwindet sie.

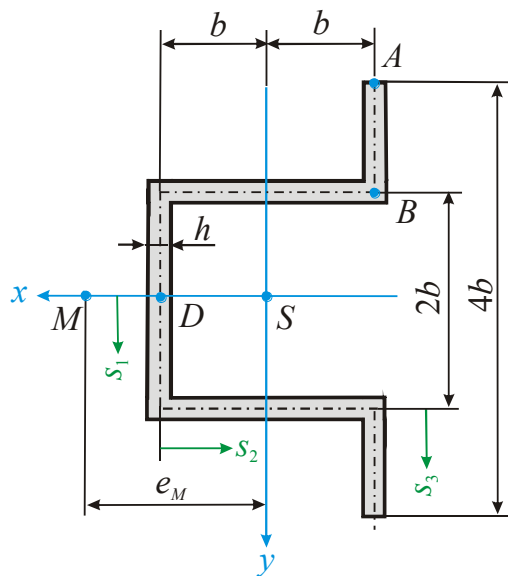
Es ist daher empfehlenswert, den Koordinatenursprung für s auf einen Schnittpunkt der Profilmittellinie mit einer Symmetrieachse zu legen. Die Integrationskonstante ω_0 bzw. k verschwindet und es braucht nur die Hälfte (ein Viertel) des ω -Verlaufs berechnet zu werden.

Querschnitte, die sich aus schmalen Rechtecken zusammensetzen und deren Profilmittellinien sich alle in einem Punkt schneiden, sind *wölbfrei*.

Bezüglich dieses Punktes sind alle r_{ti} gleich null und demzufolge die Verwölbung auch.

Bei *verzweigten* Profilmittellinien werden ein Hauptstrang festgelegt und ein oder mehrere Nebenstränge definiert (s. Querkraftschub).

Zuerst wird die Verwölbung des Hauptstrangs ermittelt und die Integrationskonstante ω_0 bzw. k bestimmt. Anschließend werden die Verwölbungen der einzelnen Nebenstränge - mit den s_i vom freien Ende aus laufend - getrennt berechnet und deren Integrationskonstanten so bestimmt, dass die Verwölbungen von Haupt- und Nebenstrang an dem jeweiligen Verzweigungspunkt übereinstimmen.

Beispiel: Einheitsverwölbung eines HutprofilsGeg.: $b, h = \text{konst. } (h \ll b)$

Lage des Schwerpunktes

Lage des Schubmittelpunktes $e_M = \frac{12}{7} b$ Ges.: Einheitsverwölbung bezüglich der Punkte S, D und M ($\omega_S, \omega_D, \omega_M$)

Da der Querschnitt zur x -Achse symmetrisch ist, muss der Verlauf der Einheitsverwölbung antisymmetrisch sein. Auf der x -Achse (Punkt D) ist $\omega = 0$. Im skizzierten Koordinatensystem gilt daher $\omega(s_1 = 0) = 0$.

Einheitsverwölbung bezüglich des Schwerpunktes S :

$$\omega_{S1} = \int_0^{s_1} b \, d\bar{s}_1 = b s_1$$

$$\omega_{S2} = b^2 + \int_0^{s_2} b \, d\bar{s}_2 = b(b + s_2)$$

$$\omega_{S3} = 3b^2 - \int_0^{s_3} b \, d\bar{s}_3 = b(3b - s_3)$$

Einheitsverwölbung bezüglich des (beliebigen) Drehpunktes D :

$$\omega_{D1} = \int_0^{s_1} 0 \, d\bar{s}_1 = 0$$

$$\omega_{D2} = \int_0^{s_2} b \, d\bar{s}_2 = b s_2$$

$$\omega_{D3} = 2b^2 - \int_0^{s_3} 2b \, d\bar{s}_3 = 2b(b - s_3)$$

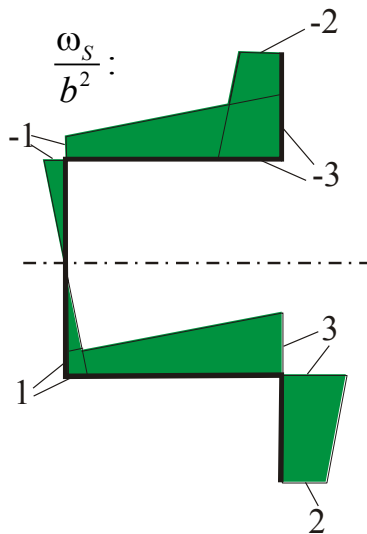
Einheitsverwölbung bezüglich des Schubmittelpunktes M :

$$\omega_{M1} = -\int_0^{s_1} (e_M - b) d\bar{s}_1 = -\frac{5}{7} b s_1$$

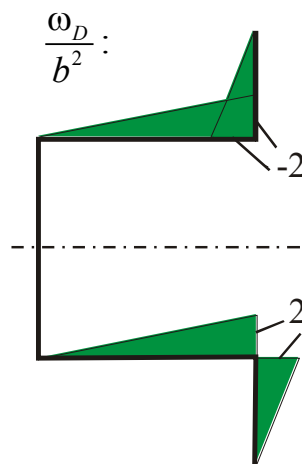
$$\omega_{M2} = -\frac{5}{7} b^2 + \int_0^{s_2} b d\bar{s}_2 = b \left(-\frac{5}{7} b + s_2 \right)$$

$$\omega_{M3} = \frac{9}{7} b^2 - \int_0^{s_3} (e_M + b) d\bar{s}_3 = b \left(\frac{9}{7} b - \frac{19}{7} s_3 \right)$$

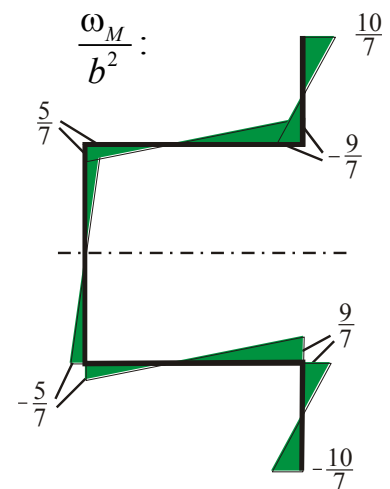
Damit können folgende Diagramme erstellt werden:



$$S_{\omega_S} = 14 b^3 h$$



$$S_{\omega_D} = 6 b^3 h$$



$$S_{\omega_M} = \frac{2}{7} b^3 h$$

Aus dem Vergleich wird deutlich, dass der Verlauf bezüglich des Schubmittelpunktes der energetisch günstigste ist. Diese Tatsache ist durchaus verallgemeinerungsfähig.

Einheitsverwölbungen und Koordinaten der drei Punkte lt. Aufgabenstellung:

Punkt	x/b	y/b	ω_S/b^2	ω_D/b^2	ω_M/b^2
A	-1	-2	-2	0	$\frac{10}{7}$
B	-1	-1	-3	-2	$-\frac{9}{7}$
D	1	0	0	0	0

Aus den konkreten Formulierungen der Gleichung (3.17):

$$\omega_S = \omega_D + x_D y - y_D x + k$$

$$\omega_S = \omega_M + x_M y - y_M x + k$$

folgt das Gleichungssystem für die Koordinaten des Punktes D :

$$\begin{array}{rclclcl} -2b^2 & = & 0 & -x_D 2b & +y_D b & +k \\ -3b^2 & = & -2b^2 & -x_D b & +y_D b & +k \\ 0 & = & 0 & +0 & -y_D b & +k \end{array}$$

mit der Lösung:

$$\underline{x_D = b} \quad \underline{y_D = 0} \quad \underline{k = 0} \quad ,$$

bzw. für die Koordinaten des Punktes M :

$$\begin{array}{rclclcl} -2b^2 & = & \frac{10}{7}b^2 & -x_M 2b & +y_M b & +k \\ -3b^2 & = & -\frac{9}{7}b^2 & -x_M b & +y_M b & +k \\ 0 & = & 0 & +0 & -y_M b & +k \end{array}$$

mit der Lösung:

$$\underline{x_M = \frac{12}{7}b} \quad \underline{y_M = 0} \quad \underline{k = 0} \quad .$$

Die berechneten Koordinaten der Punkte D und M entsprechen tatsächlich der in der Aufgabenstellung gegebenen Lage.