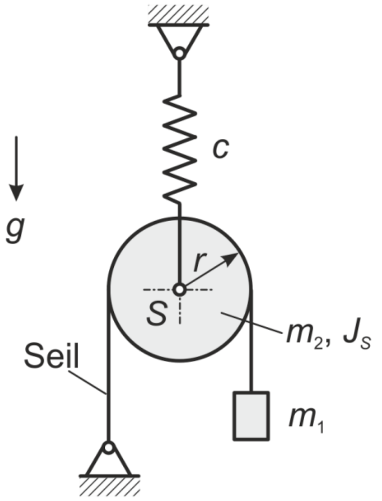


Geg.: $m_1 = m$, $m_2 = m$, $J_s = 1/2\, m_2 r^2$, m, c, r, g

Ges.:
1. Eigenfrequenz
2. Bewegungsgleichung der Masse m_1

   Lösung über
   - Prinzip von D'ALEMBERT
   - LAGRANGEsche Gleichungen 2. Art

Anm.: Skizziert ist statische Ruhelage
Kleine Ausschläge
Seil ist dehnstarr
Reibung ist vernachlässigbar

Freie ungedämpfte Schwingung mit Freiheitsgrad $f = 1$

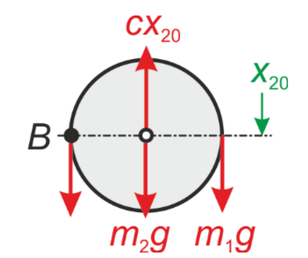
Freie Koordinaten (s. Skizzen): 3

x_1, x_2, φ

Geometrische Bedingungen: 2

$$x_2 = r\,\varphi$$

$$x_1 = x_2 + r\,\varphi$$



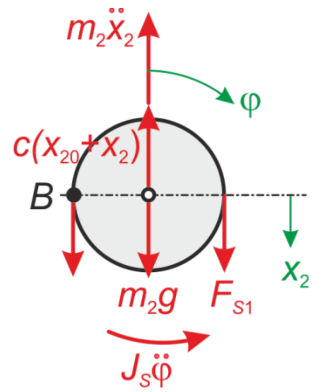
Generalisierte Koordinate: x_1

$$x_2 = \frac{x_1}{2} \qquad \dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_1}{2} \qquad \ddot{x}_2 = \frac{\ddot{x}_1}{2} \qquad (1)$$

$$\varphi = \frac{x_1}{2r} \qquad \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_1}{2r} \qquad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_1}{2r} \qquad (2)$$

statische Ruhelage:

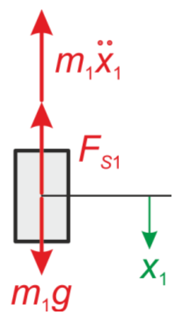
$$\curvearrowleft B: \quad c\,x_{20}\,r - m_1\,g\,2r - m_2\,g\,r = 0 \qquad (3)$$



weitere Lösung nach:

- Prinzip von D'ALEMBERT:

$$\curvearrowleft B: \quad c\,(x_{20} + x_2)\,r - F_{S1}\,2r - m_2\,g\,r + J_S\,\ddot{\varphi} + m_2\,\ddot{x}_2\,r = 0 \qquad (4)$$



$$\uparrow: \quad F_{S1} - m_1\,g + m_1\,\ddot{x}_1 = 0 \qquad (5)$$

(5) in (4):

$$c\left(x_{20}+x_2\right)-2\,m_1\,g-m_2\,g+2\,m_1\,\ddot{x}_1+\frac{J_S}{r}\,\ddot{\varphi}+m_2\,\ddot{x}_2=0 \qquad (4')$$

(3) in (4'):

$$c\,x_2+2\,m_1\,\ddot{x}_1+\frac{J_S}{r}\,\ddot{\varphi}+m_2\,\ddot{x}_2=0 \qquad (4'')$$

(1) und (2) in (4'')

$$c\,\frac{x_1}{2}+\left(2\,m_1+\frac{1}{2}\,m_2+\frac{1}{2}\,\frac{J_S}{r^2}\right)\ddot{x}_1=0$$

$$\left(4\,m_1+m_2+\frac{J_S}{r^2}\right)\ddot{x}_1+c\,x_1=0$$

$$\ddot{x}_1+\underbrace{\frac{c}{4\,m_1+m_2+\frac{J_S}{r^2}}}_{\omega_0^2}\,x_1=0 \qquad (4''')$$

- LAGRANGEsche Gleichungen 2. Art

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)^{\bullet}-\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$$

$$L=T-U$$

$$T=\frac{1}{2}\left(m_1\,\dot{x}_1^2+m_2\,\dot{x}_2^2+J_S\,\dot{\varphi}^2\right)$$

$$U=-m_1\,g\,x_1-m_2\,g\,x_2+\frac{c}{2}\left(x_{20}+x_2\right)^2$$

$$L=\frac{1}{2}\left(m_1\,\dot{x}_1^2+m_2\,\dot{x}_2^2+J_S\,\dot{\varphi}^2\right)+m_1\,g\,x_1+m_2\,g\,x_2-\frac{c}{2}\left(x_{20}+x_2\right)^2 \qquad (6)$$

(1) und (2) in (6):

$$L=\frac{1}{2}\left(m_1\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{4}m_2\,\dot{x}_1^2+\frac{1}{4}\,\frac{J_S}{r^2}\,\dot{x}_1^2\right)+m_1\,g\,x_1+m_2\,g\,\frac{x_1}{2}-\frac{c}{2}\left(x_{20}+\frac{x_1}{2}\right)^2$$

$$L=\frac{1}{2}\left(m_1+\frac{1}{4}m_2+\frac{1}{4}\,\frac{J_S}{r^2}\right)\dot{x}_1^2+\left(m_1+\frac{1}{2}m_2\right)g\,x_1-\frac{c}{2}\left(x_{20}+\frac{x_1}{2}\right)^2 \qquad (6')$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \left(m_1 + \frac{1}{4} m_2 + \frac{1}{4} \frac{J_S}{r^2} \right) \dot{x}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)^{\bullet} = \left(m_1 + \frac{1}{4} m_2 + \frac{1}{4} \frac{J_S}{r^2} \right) \ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) g - \frac{c}{2} \left(x_{20} + \frac{x_1}{2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right)^{\bullet} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \left(m_1 + \frac{1}{4} m_2 + \frac{1}{4} \frac{J_S}{r^2} \right) \ddot{x}_1 - \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 \right) g + \frac{c}{2} \left(x_{20} + \frac{x_1}{2} \right) = 0 \qquad (7)$$

(3) in (7):

$$\left(4\, m_1 + m_2 + \frac{J_S}{r^2} \right) \ddot{x}_1 + c\, x_1 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \underbrace{\frac{c}{4\, m_1 + m_2 + \frac{J_S}{r^2}}}_{\omega_0^2}\, x_1 = 0$$

Eigenfrequenz:

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{4\, m_1 + m_2 + \frac{J_S}{r^2}}}}$$

Mit den gegebenen Verhältnissen:

$$\underline{\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{7\, m}}}$$