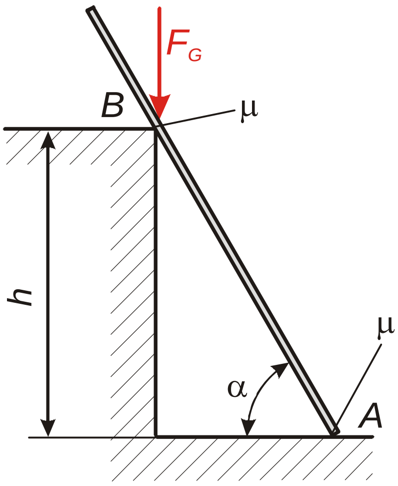
Eine Person vom Gewicht $F_G$ möchte in der Höhe $h$ von einer Leiter auf ein Podest umsteigen.




Geg.: $\alpha = 60°$, $\mu = 0{,}5$, $(F_G)$

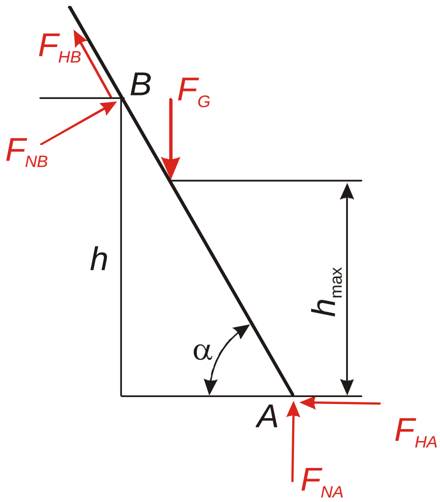
Ges.:
1. Ist das Umsteigen gefahrlos möglich?
2. Welche Höhe ist maximal erreichbar?
3. Was kann geändert werden, um die Höhe $h$ mindestens zu erreichen?

Anm.: Gewicht der Leiter gegenüber $F_G$ vernachlässigbar
Zur Sicherheit: Verwendung des (kleineren) Gleitreibungskoeffizienten

---

## Analytische Lösung:

### Zu 1. und 2.:




Gleichgewichtsbedingungen:

$$\rightarrow: \quad -F_{HA} + F_{NB}\sin\alpha - F_{HB}\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\uparrow: \quad F_{NA} + F_{NB}\cos\alpha + F_{HB}\sin\alpha - F_G = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowleft A: \quad F_G \frac{h_{max}}{\tan\alpha} - F_{NB}\frac{h}{\sin\alpha} = 0 \qquad (3)$$

Reibungsgesetz:

$$F_{HA} = \mu\, F_{NA} \qquad (4)$$

$$F_{HB} = \mu\, F_{NB} \qquad (5)$$

Lösung:

(4) und (5) in (1) und (2):

$$-\mu\, F_{NA} + F_{NB}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) = 0 \qquad (1')$$

$$F_{NA} + F_{NB}\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) - F_G = 0 \qquad (2')$$

(2’) in (1’):

$$\mu\left(F_{NB}\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) - F_G\right) + F_{NB}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) = 0$$

$$F_{NB} = \frac{\mu}{\sin\alpha\left(1+\mu^2\right)} F_G \qquad (1'')$$

(1'') in (3):

$$F_G\,\frac{h_{max}}{\tan\alpha}-\frac{\mu}{\sin\alpha\left(1+\mu^2\right)}\,F_G\,\frac{h}{\sin\alpha}=0$$

$$\underline{\frac{h_{max}}{h}=\frac{\mu}{1+\mu^2}\,\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{8\sqrt{3}}{15}\approx 0{,}92}$$

Da die Podesthöhe nicht erreicht wird, ist ein gefahrloses Umsteigen nicht möglich.

Bemerkenswert ist, dass das Gewicht der Person in die Lösung des Problems nicht eingeht.

Zu 3.:

Bedingung für gefahrloses Umsteigen:

$$\frac{h_{max}}{h}=\frac{\mu}{1+\mu^2}\,\frac{1}{\sin\alpha\,\cos\alpha}\geq 1$$

- Änderung des Anstellwinkels:

$$\frac{h_{max}}{h}=\frac{2}{5}\,\frac{1}{\sin\alpha\,\cos\alpha}\geq 1$$

$$\sin\alpha\,\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\leq\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha\leq\frac{4}{5}$$

$$\alpha\leq\frac{1}{2}\arcsin 0{,}8$$

$$\alpha_1\leq 26{,}56° \qquad \text{(keine physikalische Bedeutung)}$$

$$\underline{\alpha_2\geq 63{,}44°}$$

Ein geringes steiler Stellen der Leiter macht die Höhe *h* erreichbar.

- Änderung des Reibungskoeffizienten (Materialpaarung):

$$\frac{\mu}{1+\mu^2}\,\frac{1}{\sin\alpha\,\cos\alpha}=\frac{\mu}{1+\mu^2}\,\frac{4\sqrt{3}}{3}\geq 1$$

$$\mu^2-\frac{4\sqrt{3}}{3}\,\mu+1\leq 0$$

$$\mu_{1,2}\geq\frac{2\sqrt{3}}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{3}-1}$$

$$\mu_{1,2}\geq\frac{2\sqrt{3}}{3}\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

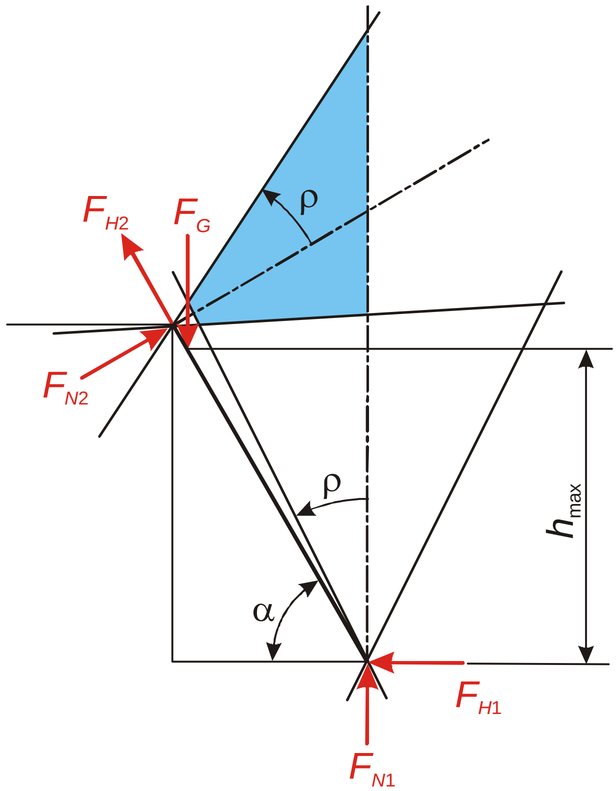
$$\underline{\mu_1\geq\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}5774}$$

$\mu_2 \geq \sqrt{3} \approx 1{,}732$ (keine physikalische Bedeutung)

$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$ (Die linke Mantellinie des vertikalen Reibkegels fällt mit der Längsrichtung der Leiter zusammen)

Eine geringe Erhöhung des Reibungskoeffizienten macht die Höhe *h* ebenfalls erreichbar. Die Kombination der beiden Veränderungen ist sinnvoll.

Grafische Lösung:




$\rho = \arctan\mu = 26{,}56°$

Die in der analytischen Lösung aufgezeigten Möglichkeiten zur Lösung des Problems sind in obiger Skizze leicht nachvollziehbar.