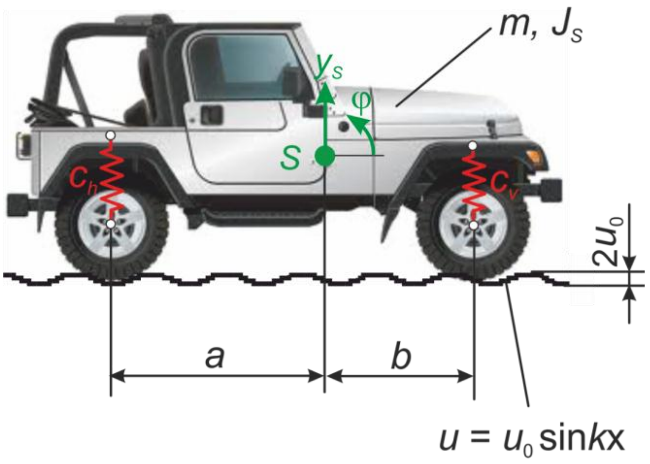


Geländewagen fährt mit v = konst. auf unebener Fahrbahn und gerät in Schwingungen.

Geg.: $m = 10\ t$, $J_S = 2000\ kgm^2$,
$c_v = 100\ kN/m$, $c_h = 200\ kN/m$,
$a = 2\ m$, $b = 1\ m$, $v = 10\ m/s$,
$u(x) = u_0 \sin kx$, $u_0 = 0{,}03\ m$, $k = 2\pi/m$

Ges.:
1. Bewegungsgleichungen für Hub- und Nickbewegung
2. vollständige Lösungen der Bewegungsgleichungen
   $t = 0: \quad y_S = y_{S0};\ \dot{y}_S = v_{S0};\ \varphi = \varphi_0;\ \dot{\varphi} = \omega_0$

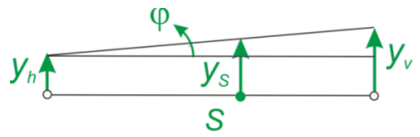
Wegerregte Schwingung mit Freiheitsgrad $f = 2$

freie Koordinaten: y_v, y_h, y_S, φ

generalisierte Koordinaten: y_S, φ

Zwangsbedingungen:

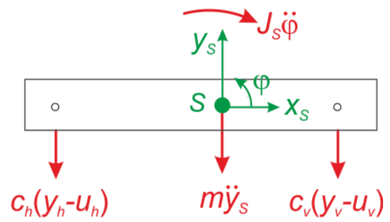
$$y_h = y_S - a\,\varphi$$
$$y_v = y_S + b\,\varphi$$



Erregerfunktionen:

$$x_v = x_s + b$$
$$x_h = x_s - a$$
$$u_v = u_0 \sin k\left(x_s + b\right)$$
$$u_h = u_0 \sin k\left(x_s - a\right)$$

Bewegungsgleichungen nach Prinzip von D'ALEMBERT:



$$\downarrow: \quad m\,\ddot{y}_S + c_v\left(y_v - u_v\right) + c_h\left(y_h - u_h\right) = 0$$
$$S: \quad J_S\,\ddot{\varphi} + c_v\left(y_v - u_v\right) b - c_h\left(y_h - u_h\right) a = 0$$

$$m\,\ddot{y}_S + c_v\,y_v + c_h\,y_h = c_v\,u_v + c_h\,u_h$$
$$J_S\,\ddot{\varphi} + c_v\,y_v\,b - c_h\,y_h\,a = c_v\,u_v\,b - c_h\,u_h\,a$$

$$m\,\ddot{y}_S + c_v\left(y_S + b\,\varphi\right) + c_h\left(y_S - a\,\varphi\right) = c_v\,u_v + c_h\,u_h$$
$$J_S\,\ddot{\varphi} + c_v\left(y_S + b\,\varphi\right) b - c_h\left(y_S - a\,\varphi\right) a = c_v\,u_v\,b - c_h\,u_h\,a$$

$$m\,\ddot{y}_S + \left(c_v + c_h\right) y_S + \left(c_v\,b - c_h\,a\right)\varphi = c_v\,u_v + c_h\,u_h$$
$$J_S\,\ddot{\varphi} + \left(c_v\,b - c_h\,a\right) y_S + \left(c_h\,a^2 + c_v\,b^2\right)\varphi = c_v\,u_v\,b - c_h\,u_h\,a$$

$$m\,\ddot{y}_S + (c_v + c_h)\,y_S + (c_v\,b - c_h\,a)\,\varphi = c_v\,u_0\,\sin k(x_s + b) + c_h\,u_0\,\sin k(x_s - a)$$
$$J_S\,\ddot{\varphi} + (c_v\,b - c_h\,a)\,y_S + \left(c_h\,a^2 + c_v\,b^2\right)\varphi = c_v\,b\,u_0\,\sin k(x_s + b) - c_h\,a\,u_0\,\sin k(x_s - a)\,a$$

$$v = \frac{x_s}{t}$$
$$x_s = v\,t$$

$$m\,\ddot{y}_S + (c_v + c_h)\,y_S + (c_v\,b - c_h\,a)\,\varphi = u_0\left[c_v\,\sin k(v\,t + b) + c_h\,\sin k(v\,t - a)\right]$$
$$J_S\,\ddot{\varphi} + (c_v\,b - c_h\,a)\,y_S + \left(c_h\,a^2 + c_v\,b^2\right)\varphi = u_0\left[c_v\,b\,\sin k(v\,t + b) - c_h\,a\,\sin k(v\,t - a)\,a\right]$$

$$\sin k(v\,t + b) = \sin kvt\,\cos kb + \cos kvt\,\sin kb$$
$$\sin k(v\,t - a) = \sin kvt\,\cos ka - \cos kvt\,\sin ka$$

$$m\,\ddot{y}_S + (c_v + c_h)\,y_S + (c_v\,b - c_h\,a)\,\varphi$$
$$= u_0\left[(c_h\,\cos ka + c_v\,\cos kb)\sin kvt + (-c_h\,\sin ka + c_v\,\sin kb)\cos kvt\right]$$
$$J_S\,\ddot{\varphi} + (c_v\,b - c_h\,a)\,y_S + \left(c_h\,a^2 + c_v\,b^2\right)\varphi$$
$$= u_0\left[(-c_h\,a\cos ka + c_v\,b\cos kb)\sin kvt + (c_h\,a\sin ka + c_v\,b\sin kb)\cos kvt\right]$$

Symbolische Schreibweise (s. Formelsammlung):

$$m_{11}\,\ddot{y}_S + c_{11}\,y_S + c_{12}\,\varphi = u_{11}\,\sin\Omega t + u_{12}\,\cos\Omega t$$
$$m_{22}\,\ddot{\varphi} + c_{21}\,y_S + c_{22}\,\varphi = u_{21}\,\sin\Omega t + u_{22}\,\cos\Omega t$$

mit:

$$m_{11} = m = 10^4\ kg \qquad m_{22} = J_S = 2\cdot 10^3\ kgm^2$$
$$c_{11} = c_v + c_h = 3\cdot 10^5\ \frac{kg}{s^2} \qquad c_{22} = c_h\,a^2 + c_v\,b^2 = 9\cdot 10^5\ \frac{kg\ m^2}{s^2}$$
$$c_{12} = c_{21} = c_v\,b - c_h\,a = -3\cdot 10^5\ \frac{kg\ m}{s^2}$$
$$ka = 4\,\pi \qquad \sin 4\pi = 0 \qquad \cos 4\pi = 1$$
$$kb = 2\,\pi \qquad \sin 2\pi = 0 \qquad \cos 2\pi = 1$$
$$u_{11} = u_0\,(c_h\,\cos ka + c_v\,\cos kb) = 9\cdot 10^3\ \frac{kg\ m}{s^2}$$
$$u_{22} = u_0\,(c_h\,a\sin ka + c_v\,b\sin kb) = 0$$
$$u_{12} = u_0\,(-c_h\,\sin ka + c_v\,\sin kb) = 0$$
$$u_{21} = u_0\,(-c_h\,a\cos ka + c_v\,b\cos kb) = -9\cdot 10^3\ \frac{kg\ m^2}{s^2}$$
$$\Omega = k\,v = 20\,\pi\,\frac{1}{s} = 62{,}83\,\frac{1}{s}$$

Die Lösungen dieses DGL-Systems setzen sich aus den homogenen und den partikulären Lösungen zusammen.

Die **homogene Lösung** entspricht der Lösung des Problems als freie Schwingung (keine Wegerregung). Diese Schwingung klingt wegen der (immer vorhandenen) Dämpfung mit der Zeit ab.

$$
\begin{aligned}
m_{11}\,\ddot{y}_S + c_{11}\,y_S + c_{12}\,\varphi &= 0 \\
m_{22}\,\ddot{\varphi} + c_{21}\,y_S + c_{22}\,\varphi &= 0
\end{aligned}
$$

Ansätze (Verzicht auf Index *h* für "homogen"):

$$
\begin{aligned}
y_S &= d_1\,e^{\lambda t} \qquad & \ddot{y}_S &= \lambda^2\,d_1\,e^{\lambda t} \\
\varphi &= d_2\,e^{\lambda t} \qquad & \ddot{\varphi} &= \lambda^2\,d_2\,e^{\lambda t}
\end{aligned}
$$

Charakteristische Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\left(m_{11}\,\lambda^2 + c_{11}\right) d_1 + c_{12}\,d_2 &= 0 \\
c_{21}\,d_1 + \left(m_{22}\,\lambda^2 + c_{22}\right) d_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Koeffizientendeterminante:

$$
\left(m_{11}\,\lambda^2 + c_{11}\right)\left(m_{22}\,\lambda^2 + c_{22}\right) - c_{12}\,c_{21} = 0
$$

$$
\lambda^4 + \frac{m_{11}\,c_{22} + m_{22}\,c_{11}}{m_{11}\,m_{22}}\,\lambda^2 + \frac{c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}}{m_{11}\,m_{22}} = 0
$$

$$
\lambda_{I,II}^2 = -\frac{m_{11}\,c_{22} + m_{22}\,c_{11}}{2\,m_{11}\,m_{22}}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{\left(c_{11}\,c_{22} - c_{12}\,c_{21}\right) 4\,m_{11}\,m_{22}}{\left(m_{11}\,c_{22} + m_{22}\,c_{11}\right)^2}}\right]
$$

Definition:

$$
\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_h + c_v}{m} + \frac{c_h\,a^2 + c_v\,b^2}{J_S}\right)\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\,c_h\,c_v}{m\,J_S}\left(\frac{a+b}{\frac{c_h + c_v}{m} + \frac{c_h\,a^2 + c_v\,b^2}{J_S}}\right)^2}\right]
$$

$$
= 240\left(1 - \sqrt{\frac{27}{32}}\right)\frac{1}{s^2} = 19{,}546\,\frac{1}{s^2} \qquad \underline{\omega_1 = 4{,}42\,\frac{1}{s} < \Omega = 62{,}83\,\frac{1}{s}}
$$

$$
\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_h + c_v}{m} + \frac{c_h\,a^2 + c_v\,b^2}{J_S}\right)\left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\,c_h\,c_v}{m\,J_S}\left(\frac{a+b}{\frac{c_h + c_v}{m} + \frac{c_h\,a^2 + c_v\,b^2}{J_S}}\right)^2}\right]
$$

$$
= 240\left(1 + \sqrt{\frac{27}{32}}\right)\frac{1}{s^2} = 460{,}45\,\frac{1}{s^2} \qquad \underline{\omega_2 = 21{,}46\,\frac{1}{s} = 62{,}83\,\frac{1}{s}}
$$

Lösungen der charakteristischen Gleichungen:

$$\lambda_1 = i\ \omega_1$$
$$\lambda_2 = -i\ \omega_1$$
$$\lambda_3 = i\ \omega_2$$
$$\lambda_4 = -i\ \omega_2$$

Umformung der e-Funktionen über die EULER-Formel:

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin\omega t$$
$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i \sin\omega t$$

Homogene Lösung:

$$y_S = d_{11} \sin\omega_1 t + d_{12} \cos\omega_1 t + d_{13} \sin\omega_2 t + d_{14} \cos\omega_2 t$$
$$\varphi = d_{21} \sin\omega_1 t + d_{22} \cos\omega_1 t + d_{23} \sin\omega_2 t + d_{24} \cos\omega_2 t$$

Die Konstanten d_{1i} und d_{2i} sind nach den charakteristischen Gleichungen nicht unabhängig voneinander. Es gilt z. B.:

$$\frac{d_{2i}}{d_{1i}} = -\frac{m_{11}\ \lambda_{I,II}^2 + c_{11}}{c_{12}} = \left(1 + \lambda_{I,II}^2\ \frac{s^2}{30}\right)\frac{1}{m} = \kappa_{I,II} \qquad (i = 1, 4)$$

Die dann in

$$y_S = d_1 \sin\omega_1 t + d_2 \cos\omega_1 t + d_3 \sin\omega_2 t + d_4 \cos\omega_2 t$$
$$\varphi = \kappa_I \left(d_1 \sin\omega_1 t + d_2 \cos\omega_1 t\right) + \kappa_{II} \left(d_3 \sin\omega_2 t + d_4 \cos\omega_2 t\right)$$

verbliebenen 4 Konstanten sind über die 4 Anfangsbedingungen zu bestimmen.
(Hier nicht ausgeführt.)

$$\dot{y}_S(t=0) = v_{y0} \qquad y_S(t=0) = y_{S0}$$
$$\dot{\varphi}(t=0) = \omega_0 \qquad \dot{\varphi}(t=0) = \varphi_0$$

Die **Partikulärlösung** existiert so lange, wie die Erregung existiert. Diese (stationäre) Lösung wird im Weiteren ermittelt.

Ansatz (Verzicht auf Index *p* für "partikulär"):

$$y_S = A \sin\Omega t \qquad \ddot{y}_S = -\Omega^2 A \sin\Omega t$$
$$\varphi = C \sin\Omega t \qquad \ddot{\varphi} = -\Omega^2 C \sin\Omega t$$

$$-m_{11}\ \Omega^2\ A \sin\Omega t + c_{11}\ A \sin\Omega t + c_{12}\ C \sin\Omega t = u_{11} \sin\Omega t$$
$$-m_{22}\ \Omega^2\ C \sin\Omega t + c_{21}\ A \sin\Omega t + c_{22}\ C \sin\Omega t = u_{21} \sin\Omega t$$

Koeffizientenvergleich:

$\sin\Omega t:$ $$\left(c_{11}-m_{11}\,\Omega^2\right)A+c_{12}\,C=u_{11}$$
$$c_{21}\,A+\left(c_{22}-m_{22}\,\Omega^2\right)C=u_{21}$$

$$A=\frac{u_{11}\,\dfrac{c_{22}-m_{22}\,\Omega^2}{c_{11}-m_{11}\,\Omega^2}-u_{21}\,\dfrac{c_{12}}{c_{11}-m_{11}\,\Omega^2}}{c_{22}-m_{22}\,\Omega^2-\dfrac{c_{12}^2}{c_{11}-m_{11}\,\Omega^2}}=-0{,}24\ mm$$

$$C=-\frac{u_{11}\,\dfrac{c_{12}}{c_{11}-m_{11}\,\Omega^2}-u_{21}}{c_{22}-m_{22}\,\Omega^2-\dfrac{c_{12}^2}{c_{11}-m_{11}\,\Omega^2}}=-0{,}074^\circ$$

Partikuläre Lösung:

$$\underline{y_S=-0{,}24\ mm\ \sin\Omega t}$$

$$\underline{\varphi=-0{,}074^\circ\ \sin\Omega t}$$