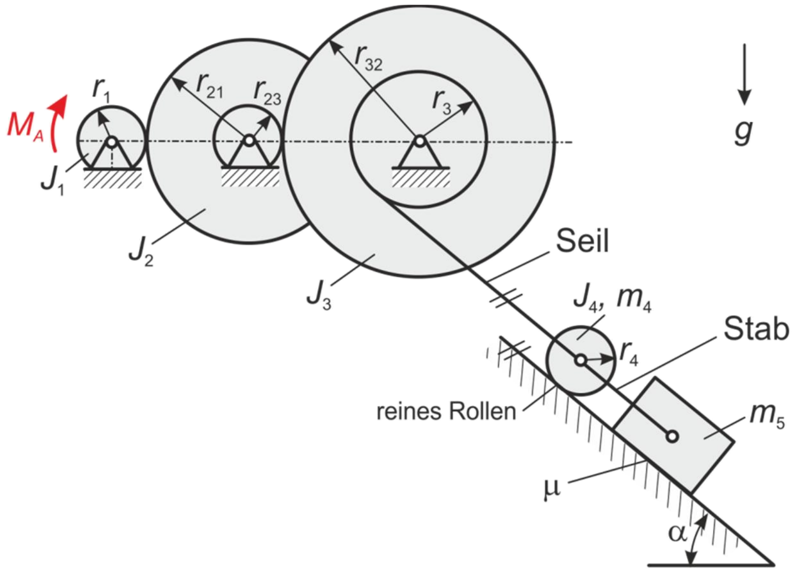
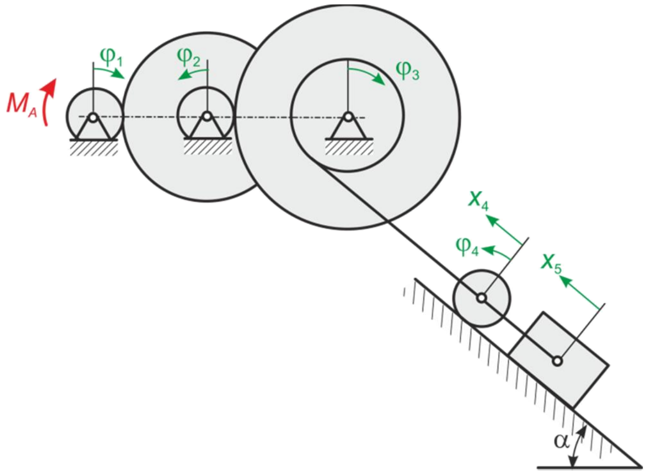


Geg.: $r_1 = r_{23} = r_4 = r,\;\; r_{21} = 3r,\;\; r_{32} = 4r,\;\; r_3 = 2r$
$J_1 = J_4 = 2\,mr^2,\;\; J_2 = 6\,mr^2,\;\; J_3 = 8\,mr^2,\;\; m_4 = 2\,m,\;\; m_5 = 6\,m,\;\; \alpha,\;\; m,\;\; r,\;\; \mu,\;\; \mu_0,\;\; g$

Ges.:
1. Beschleunigung der Masse m_5 für gegebenes Antriebsmoment
   Lösung über
   - Prinzip von D'ALEMBERT
   - LAGRANGEsche Gleichungen 2. Art
2. Mindestwert für M_A, um System aus der Ruhe heraus zu beschleunigen
3. Seil- und Stabkraft

Anm.: Seil ist dehnstarr
Gleitreibung im Zahnradgetriebe ist vernachlässigbar

Bewegung mit Freiheitsgrad $f = 1$



Freie Koordinaten (s. Skizze): 6

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, x_4, x_5$

Geometrische Bedingungen: 5

$r_1\,\varphi_1 = r_{21}\,\varphi_2$

$r_{23}\,\varphi_2 = r_{32}\,\varphi_3$

$r_3\,\varphi_3 = x_4$

$x_4 = r_4\,\varphi_4$

$x_4 = x_5$

Generalisierte Koordinate: x_5

$$\varphi_1 = \frac{r_{21}}{r_1}\frac{r_{32}}{r_{23}}\frac{x_5}{r_3} = 3 \cdot 4\,\frac{x_5}{2\,r} = 6\,\frac{x_5}{r} \qquad (1)$$

$$\varphi_2 = \frac{r_{32}}{r_{23}}\frac{x_5}{r_3} = 4\,\frac{x_5}{2\,r} = 2\,\frac{x_5}{r} \qquad (2)$$

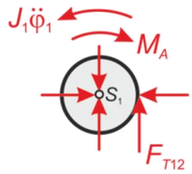
$$\varphi_3 = \frac{x_5}{r_3} = \frac{1}{2}\,\frac{x_5}{r} \qquad (3)$$

$$\varphi_4 = \frac{x_5}{r_4} = \frac{x_5}{r} \qquad (4)$$

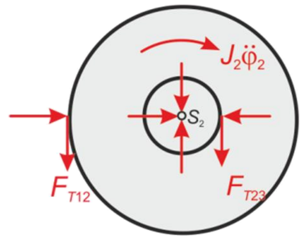
$$x_4 = x_5 \qquad (5)$$

weitere Lösung nach:

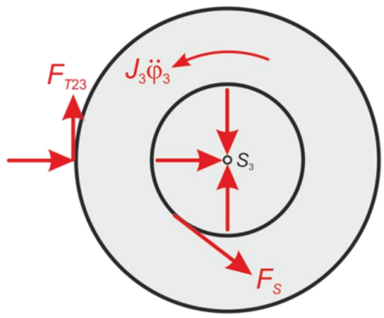
- Prinzip von D'ALEMBERT:



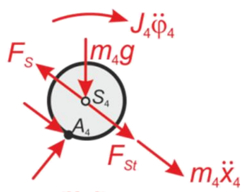
$$\overset{\curvearrowleft}{S_1}: \quad -M_A + F_{T12}\, r_1 + J_1\, \ddot{\varphi}_1 = 0 \qquad (6)$$



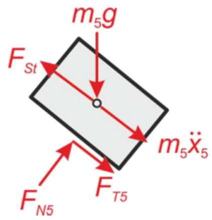
$$\overset{\curvearrowleft}{S_2}: \quad F_{T12}\, r_{21} - F_{T23}\, r_{23} - J_2\, \ddot{\varphi}_2 = 0 \qquad (7)$$



$$\overset{\curvearrowleft}{S_3}: \quad -F_{T23}\, r_{32} + F_S\, r_3 + J_3\, \ddot{\varphi}_3 = 0 \qquad (8)$$



$$\overset{\curvearrowleft}{A_4}: \quad \left(F_S - F_{St} - m_4\, g \sin\alpha - m_4\, \ddot{x}_4\right) r_4 - J_4\, \ddot{\varphi}_4 = 0 \qquad (9)$$



$$\nwarrow: \quad F_{St} - F_{T5} - m_5\, g \sin\alpha - m_5\, \ddot{x}_5 = 0 \qquad (10)$$

$$\nearrow: \quad F_{N5} - m_5\, g \cos\alpha \qquad (11)$$

$$F_{T5} = \mu\, F_{N5} \qquad (12)$$

(8) und (7) in (6):

$$M_A \frac{r_{21}}{r_1} - J_1 \frac{r_{21}}{r_1}\, \ddot{\varphi}_1 - F_S \frac{r_3}{r_{32}}\, r_{23} - J_3 \frac{r_{23}}{r_{32}}\, \ddot{\varphi}_3 - J_2\, \ddot{\varphi}_2 = 0 \qquad (6')$$

(11) und (12) in (10):

$$F_{St} - \mu\, m_5\, g \cos\alpha - m_5\, g \sin\alpha - m_5\, \ddot{x}_5 = 0 \qquad (10')$$

(6'), (10') und (9) mit gegebenen Werten:

$$3\,M_A - 6\,m\,r^2\,\ddot{\varphi}_1 - F_S\,\frac{r}{2} - 2\,m\,r^2\,\ddot{\varphi}_3 - 6\,m\,r^2\,\ddot{\varphi}_2 = 0$$
$$F_{St} - \mu\,6\,m\,g\cos\alpha - 6\,m\,g\sin\alpha - 6\,m\,\ddot{x}_5 = 0$$
$$F_S - F_{St} - 2\,m\,g\sin\alpha - 2\,m\,\ddot{x}_4 - 2\,m\,r\,\ddot{\varphi}_4 = 0$$

Generalisierte Koordinate in entstandenes Gleichungssystem:

$$3\,\frac{M_A}{r} - 36\,m\,\ddot{x}_5 - F_S\,\frac{1}{2} - m\,\ddot{x}_5 - 12\,m\,\ddot{x}_5 = 0$$
$$F_S - F_{St} - 2\,m\,g\sin\alpha - 4\,m\,\ddot{x}_5 = 0$$
$$F_{St} - \mu\,6\,m\,g\cos\alpha - 6\,m\,g\sin\alpha - 6\,m\,\ddot{x}_5 = 0$$

Lösung des Gleichungssystems:

$$\underline{\ddot{x}_5 = \frac{1}{18}\left[\frac{M_A}{m\,r} - \left(\frac{4}{3}\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right)g\right]}$$

$$\underline{F_{St} = \frac{1}{3}\,\frac{M_A}{r} + \left(\frac{17}{3}\,\mu\cos\alpha + \frac{50}{9}\sin\alpha\right)m\,g}$$

$$\underline{F_S = \frac{5}{9}\,\frac{M_A}{r} + \left(\frac{196}{27}\sin\alpha + 9\,\mu\cos\alpha\right)m\,g}$$

- LAGRANGEsche Gleichungen 2. Art

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_5}\right)^{\bullet} - \frac{\partial T}{\partial x_5} = Q_5$$

$$\delta W = Q_5\,\delta x_5$$

$$T = \frac{1}{2}\left(J_1\,\dot{\varphi}_1^2 + J_2\,\dot{\varphi}_2^2 + J_3\,\dot{\varphi}_3^2 + J_4\,\dot{\varphi}_4^2 + m_4\,\dot{x}_4^2 + m_5\,\dot{x}_5^2\right)$$
$$\delta W = M_A\,\varphi_1 - m_4\,g\sin\alpha\,\delta x_4 - m_5\,g\sin\alpha\,\delta x_5 - \mu\,m_5\,g\cos\alpha\,\delta x_5$$

T und δW mit generalisierter Koordinate:

$$T = \frac{1}{2}\left(36\,\frac{J_1}{r^2} + 4\,\frac{J_2}{r^2} + \frac{1}{4}\,\frac{J_3}{r^2} + \frac{J_4}{r^2} + m_4 + m_5\right)\dot{x}_5^2$$

$$\delta W = \frac{M_A}{r}\,6\,\delta x_5 - \left(m_4 \sin\alpha + m_5 \sin\alpha + \mu\, m_5 \cos\alpha\right) g\,\delta x_5$$

$$\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{x}_5}\right)^{\bullet} = \left(36\,\frac{J_1}{r^2} + 4\,\frac{J_2}{r^2} + \frac{1}{4}\,\frac{J_3}{r^2} + \frac{J_4}{r^2} + m_4 + m_5\right)\ddot{x}_5$$

$$\frac{\delta T}{\delta x_5} = 0$$

$$\delta W = 6\,\frac{M_A}{r}\,\delta x_5 - \left(m_4 \sin\alpha + m_5 \sin\alpha + \mu\, m_5 \cos\alpha\right) g\,\delta x_5$$

$$Q_5 = \frac{\delta W}{\delta x_5} = 6\,\frac{M_A}{r} - \left(m_4 \sin\alpha + m_5 \sin\alpha + \mu\, m_5 \cos\alpha\right) g$$

$$\left(36\,\frac{J_1}{r^2} + 4\,\frac{J_2}{r^2} + \frac{1}{4}\,\frac{J_3}{r^2} + \frac{J_4}{r^2} + m_4 + m_5\right)\ddot{x}_5 = 6\,\frac{M_A}{r} - \left(m_4 \sin\alpha + m_5 \sin\alpha + \mu\, m_5 \cos\alpha\right) g$$

$$\ddot{x}_5 = \frac{6\,\frac{M_A}{r} - \left(m_4 \sin\alpha + m_5 \sin\alpha + \mu\, m_5 \cos\alpha\right) g}{36\,\frac{J_1}{r^2} + 4\,\frac{J_2}{r^2} + \frac{1}{4}\,\frac{J_3}{r^2} + \frac{J_4}{r^2} + m_4 + m_5}$$

$$\underline{\ddot{x}_5 = \frac{1}{18}\left[\frac{M_A}{m\,r} - \left(\frac{4}{3}\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right) g\right]}$$

Seil- und Stabkraft (innere Kräfte) lassen sich nach dieser Methode nicht ermitteln.

Um die Masse m_5 aus der Ruhe heraus zu beschleunigen, muss deren Beschleunigung größer Null sein.
Außerdem ist der Gleitreibungskoeffizient durch den (größeren) Haftreibungskoeffizienten zu ersetzen.

$$\underline{M_A > \left(\frac{4}{3}\sin\alpha + \mu_0 \cos\alpha\right) m\,g\,r}$$