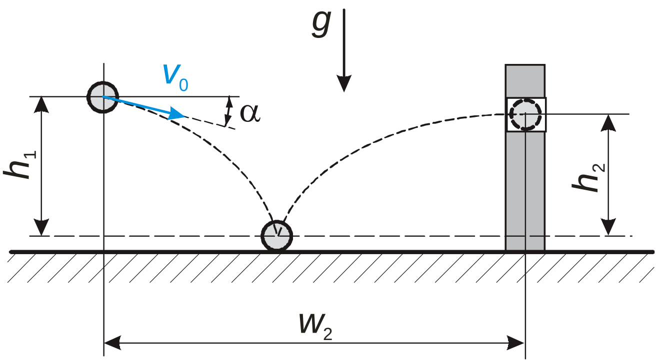


Torwandschießen

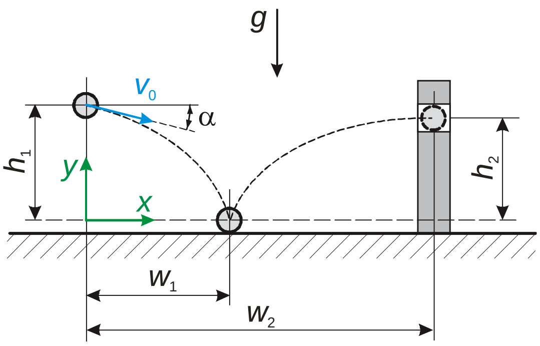
Geg.: $h_1 = 2\ m$, $h_2 = 0{,}5\ h_1$, $w_2 = 2\ h_1$,
$k = 0{,}6$ (Stoßzahl für elastisch-plastischen Stoß),
g (Erdbeschleunigung)

Ges.: Für Erfolg erforderliche Werte:
1. Abwurfwinkel α
2. Abwurfgeschwindigkeit v_0

Anm.: Horizontaler Flug durch Torwand
Glatter Stoß auf Unterlage
$h_2 > k^2\ h_1$

---

1. Phase der Bewegung $0 \le t \le t_1$:



$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g$$
$$\dot{x} = C_1 \qquad \dot{y} = -g\ t + C_3$$
$$x = C_1\ t + C_2 \qquad y = -\frac{g}{2} t^2 + C_3\ t + C_4$$

(Anfangs-)Randbedingungen:

$$\dot{x}(t=0) = v_0 \cos\alpha \qquad \dot{y}(t=0) = -v_0 \sin\alpha$$
$$x(t=0) = 0 \qquad y(t=0) = h_1$$

Konstanten:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha \qquad C_3 = -v_0 \sin\alpha$$
$$C_2 = 0 \qquad C_4 = h_1$$

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \qquad \dot{y}(t) = -g\ t - v_0 \sin\alpha$$
$$x(t) = v_0 \cos\alpha\ t \qquad y(t) = -\frac{g}{2} t^2 - v_0 \sin\alpha\ t + h_1$$

(End-)Randbedingungen

$$y(t = t_1) = 0 \qquad 0 = t_1^2 + \frac{2\,v_0}{g} \sin\alpha\ t_1 - \frac{2\,h_1}{g}$$
$$x(t = t_1) = w_1$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g}\left[-\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 2\frac{g\,h_1}{v_0^2}}\right]$$
$$w_1 = \frac{v_0^2}{g}\cos\alpha\left[-\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + 2\frac{g\,h_1}{v_0^2}}\right]$$

Stoßvorgang (glatter schiefer zentrischer Stoß)

$$\dot{y}^+(t=t_1) = -k\,\dot{y}^-(t=t_1) = k\,v_0\sqrt{\sin^2\alpha + 2\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}}$$

$$\dot{x}^+(t=t_1) = \dot{x}^-(t=t_1) = v_0\,\cos\alpha$$

2. Phase der Bewegung $t_1 \le t \le t_2$:

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -g$$

$$\dot{x} = C_5 \qquad \dot{y} = -g\,t + C_7$$

$$x = C_5\,t + C_6 \qquad y = -\frac{g}{2}\,t^2 + C_7\,t + C_8$$

(Anfangs-)Randbedingungen:

$$\dot{x}(t=t_1) = v_0\,\cos\alpha$$

$$\dot{y}(t=t_1) = k\,v_0\sqrt{\sin^2\alpha + 2\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}}$$

$$x(t=t_1) = w_1$$

$$y(t=t_1) = 0$$

Konstanten:

$$C_5 = v_0\,\cos\alpha$$

$$C_6 = 0$$

$$C_7 = v_0\left[(1+k)\sqrt{\sin^2\alpha + 2\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}} - \sin\alpha\right]$$

$$C_8 = \frac{v_0^2}{g}\left[(1+k)\,\sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + 2\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}} - (1+k)\sin^2\alpha - (1+2\,k)\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}\right]$$

$$\dot{x}(t) = v_0\,\cos\alpha$$

$$x(t) = v_0\,\cos\alpha\;t$$

$$\dot{y}(t) = -g\,t + v_0\left[(1+k)\sqrt{\sin^2\alpha + 2\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}} - \sin\alpha\right]$$

$$y(t) = -\frac{g}{2}\,t^2 + v_0\left[(1+k)\sqrt{\sin^2\alpha + 2\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}} - \sin\alpha\right]t$$

$$+\frac{v_0^2}{g}\left[(1+k)\,\sin\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + 2\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}} - (1+k)\,\sin^2\alpha - (1+2\,k)\,\frac{g\,h_1}{v_0^2}\right]$$

(End-)Randbedingungen:

$$\dot{y}(t=t_2)=0 \qquad g\,\frac{w_2}{v_0\cos\alpha}=\left(1+k\right)\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2\,g\,h_1}-v_0\sin\alpha$$

$$x(t=t_2)=w_2 \qquad t_2=\frac{w_2}{v_0\cos\alpha}$$

$$y(t=t_2)=h_2 \qquad h_2=-\frac{g}{2}\,\frac{w_2^2}{v_0^2\cos^2\alpha}+\left[\left(1+k\right)\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2\,g\,h_1}-v_0\sin\alpha\right]\frac{w_2}{v_0\cos\alpha}$$

$$+\frac{1}{g}\left[\left(1+k\right)v_0\sin\alpha\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2\,g\,h_1}-\left(1+k\right)v_0^2\sin^2\alpha-\left(1+2\,k\right)g\,h_1\right]$$

Zu lösendes Gleichungssystem:

$$0=\left(1+k\right)\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2\,g\,h_1}-v_0\sin\alpha-g\,\frac{w_2}{v_0\cos\alpha}$$

$$0=\frac{g}{2}\,\frac{w_2^2}{v_0^2\cos^2\alpha}-\frac{1}{g}\,k\,v_0^2\sin^2\alpha+w_2\tan\alpha-\left(1+2\,k\right)h_1-h_2$$

Lösungen:

$$\underline{\tan\alpha=\frac{2}{k^2\,w_2}\left[\left(1+k\right)\sqrt{h_2\left(h_2-k^2\,h_1\right)}-h_2+k^2\,h_1\right]}$$

$$\underline{\alpha=38{,}2^\circ}$$

$$\underline{v_0=\frac{\sqrt{2\,g\left(h_2-k^2\,h_1\right)}}{k}\sqrt{1+\frac{1}{\frac{4}{k^4\,w_2^2}\left[\left(1+k\right)\sqrt{h_2\left(h_2-k^2\,h_1\right)}-h_2+k^2\,h_1\right]^2}}}$$

$$\underline{v_0=6{,}315\,\frac{m}{s}}$$

Zur Kontrolle der (Zwischen-)Ergebnisse und zur Veranschaulichung:

$$t_1=0{,}354\,s$$
$$t_2=0{,}806\,s$$
$$w_1=1{,}759\,m$$

Flugbahn des Balls: