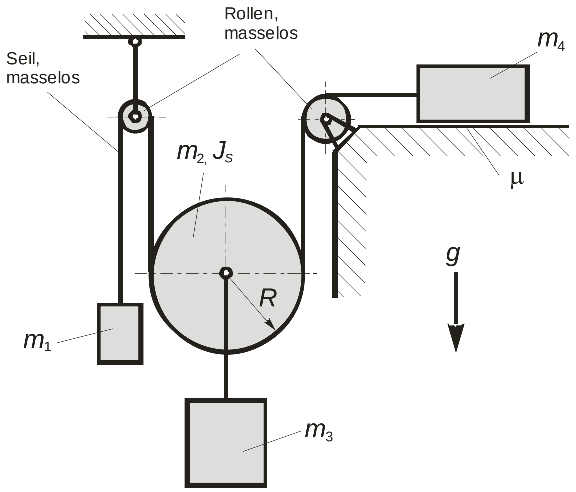


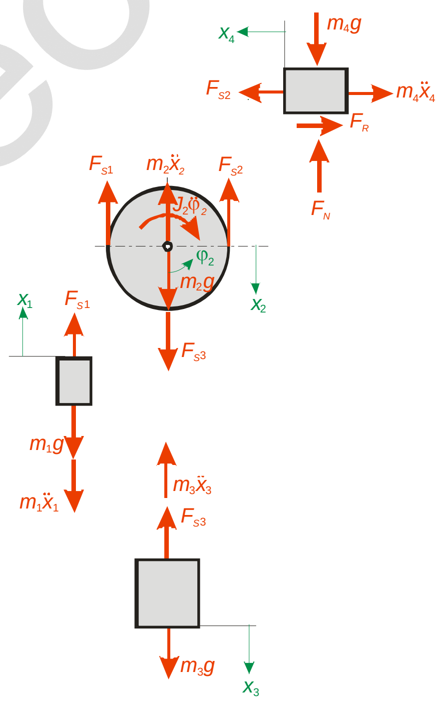
Geg.: $m_1=m$, $m_2=4\,m$, $m_3=2\,m$, $m_4=5\,m$, $J_2=½\,m_2\,R^2$, R, μ, g

Ges.: Beschleunigungen der Massen m_1 … m_4

Anm.: Masselose Rollen sind reibungsfrei gelagert
μ ist so klein, dass m_4 gleitet
Lösung nach
- Prinzip von D'ALEMBERT
- LAGRANGEsche Gleichungen

Die masselosen Rollen dienen ausschließlich zur Umlenkung der Seilkräfte.

- Lösung nach Prinzip von D'ALEMBERT



Gleichgewichtsbedingungen:

Masse m_1: $\uparrow$: $F_{S1} - m_1\,g - m_1\,\ddot{x}_1 = 0$ (1)

Masse m_2: $\uparrow$: $F_{S1} + F_{S2} - F_{S3} - m_2\,g + m_2\,\ddot{x}_2 = 0$ (2)

$\curvearrowleft 0$: $(F_{S2} - F_{S1})\,R - J_2\,\ddot{\varphi}_2 = 0$ (3)

Masse m_3: $\uparrow$: $F_{S3} - m_3\,g + m_3\,\ddot{x}_3 = 0$ (4)

Masse m_4: $\rightarrow$: $F_R - F_{S2} + m_4\,\ddot{x}_4 = 0$ (5)

$\uparrow$: $F_N - m_4\,g = 0$ (6)

Reibungsgesetz:

$$F_R = \mu\,F_N \qquad (7)$$

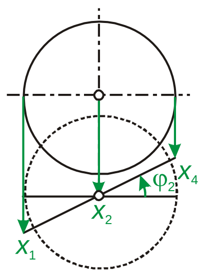
Geometrische Bedingungen:

$$\varphi_2 = \frac{x_1 - x_4}{2\,R}$$

$$x_2 = \frac{x_1 + x_4}{2}$$

$$x_3 = x_2$$

Geometrie Masse m_2:



Generalisierte Koordinaten: x_1, x_4

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{x}_1 - \ddot{x}_4}{2\,R} \qquad (8)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_4}{2} \qquad (9)$$

$$\ddot{x}_3 = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_4}{2} \qquad (10)$$

(7) in (6):

$$F_{S2} = \mu\, m_4\, g + m_4\, \ddot{x}_4$$

Aus (1):

$$F_{S1} = m_1\, g + m_1\, \ddot{x}_1$$

Aus (4):

$$F_{S3} = m_3\, g - m_3\, \ddot{x}_3$$

Seilkräfte in (2) und (3):

$$\left(m_1 - m_2 - m_3 + \mu\, m_4\right) g + m_1\, \ddot{x}_1 + m_2\, \ddot{x}_2 + m_3\, \ddot{x}_3 + m_4\, \ddot{x}_4 = 0 \qquad (2')$$

$$\left(-m_1 + \mu\, m_4\right) g - m_1\, \ddot{x}_1 + m_4\, \ddot{x}_4 - J_2\, \frac{\ddot{\varphi}_2}{R} = 0 \qquad (3')$$

(8) bis (10) in (2') und (3'):

$$\left(m_1 - m_2 - m_3 + \mu\, m_4\right) g + \left(m_1 + \frac{m_2 + m_3}{2}\right) \ddot{x}_1 + \left(m_4 + \frac{m_2 + m_3}{2}\right) \ddot{x}_4 = 0 \qquad (2'')$$

$$\left(-m_1 + \mu\, m_4\right) g - \left(m_1 + \frac{J_2}{2\, R^2}\right) \ddot{x}_1 + \left(m_4 + \frac{J_2}{2\, R^2}\right) \ddot{x}_4 = 0 \qquad (3'')$$

Massenträgheitsmoment und Massen in (2'') und (3''):

$$\left(-1 + \mu\right) 5\, g + 4\, \ddot{x}_1 + 8\, \ddot{x}_4 = 0 \qquad (2''')$$

$$\left(-1 + 5\, \mu\right) g - 2\, \ddot{x}_1 + 6\, \ddot{x}_4 = 0 \qquad (3''')$$

Lösungen des Gleichungssystems:

$$\underline{\ddot{x}_1 = \frac{11 + 5\, \mu}{20}\, g}$$

$$\underline{\ddot{x}_4 = \frac{7 - 15\, \mu}{20}\, g}$$

Damit es zum Gleiten der Masse m_4 kommt, muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\mu < \frac{7}{15}$$

Restliche Beschleunigungen aus (8) … (10):

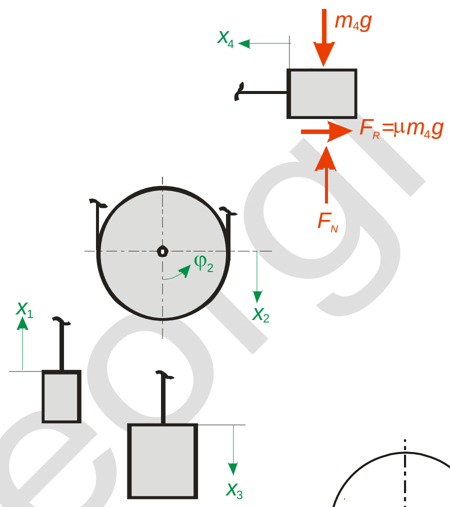
$$\underline{\ddot{\varphi}_2 = \frac{1 + 5\, \mu}{10}\, g}$$

$$\underline{\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = \frac{9 - 5\, \mu}{20}\, g}$$

- Lösung über LAGRANGEsche Gleichungen

Da mit der Reibungskraft eine Nicht-Potenzialkraft vorliegt, müssen die LAGRANGE-schen Gleichungen in der allgemeinen Form verwendet werden.

Das System hat den Freiheitsgrad 2. Als generalisierte Koordinaten werden x_1 und x_4 gewählt.
Bei 5 eingeführten Koordinaten (s. Skizze) müssen daher 3 Zwangsbedingungen angegeben werden:



$$\varphi_2 = \frac{x_1 - x_4}{2R} \qquad \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_4}{2R} \qquad (1)$$

$$x_2 = \frac{x_1 + x_4}{2} \qquad \dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_4}{2} \qquad (2)$$

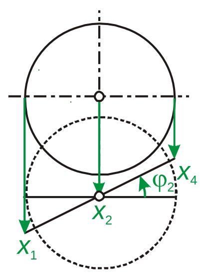
$$x_3 = x_2 \qquad \dot{x}_3 = \dot{x}_2 \qquad (3)$$

LAGRANGEsche Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)^{\bullet} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1 \qquad Q_1 = \frac{\delta W}{\delta x_1} \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right)^{\bullet} - \frac{\partial T}{\partial x_4} = Q_4 \qquad Q_4 = \frac{\delta W}{\delta x_4} \qquad (5)$$

Geometrie Masse m_2:



Kinetische Energie des Systems:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{J_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2 + \frac{m_4}{2}\dot{x}_4^2$$

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_4}{2}\right)^2 + \frac{J_2}{2}\left(\frac{\dot{x}_1 - \dot{x}_4}{2R}\right)^2 + \frac{m_3}{2}\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_4}{2}\right)^2 + \frac{m_4}{2}\dot{x}_4^2$$

$$T = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{8} + \frac{J_2}{8R^2} + \frac{m_3}{8}\right)\dot{x}_1^2 + \left(\frac{m_2}{4} - \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)\dot{x}_1\dot{x}_4 + \left(\frac{m_4}{2} + \frac{m_2}{8} + \frac{J_2}{8R^2} + \frac{m_3}{8}\right)\dot{x}_4^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = \left(m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)\dot{x}_1 + \left(\frac{m_2}{4} - \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)\dot{x}_4$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4} = \left(m_4 + \frac{m_2}{4} + \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)\dot{x}_4 + \left(\frac{m_2}{4} - \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)x_1$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)^{\bullet} = \left(m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)\ddot{x}_1 + \left(\frac{m_2}{4} - \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)\ddot{x}_4 \qquad (6)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_4}\right)^{\bullet} = \left(m_4 + \frac{m_2}{4} + \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)\ddot{x}_4 + \left(\frac{m_2}{4} - \frac{J_2}{4R^2} + \frac{m_3}{4}\right)\ddot{x}_1 \qquad (7)$$

Virtuelle Arbeit am System:

$$\delta W = -m_1\, g\, \delta x_1 + m_2\, g\, \delta x_2 + m_3\, g\, \delta x_3 - \mu\, m_4\, g\, \delta x_4$$

$$\delta W = -m_1\, g\, \delta x_1 + \frac{m_2}{2}\, g\, \left(\delta x_1 + \delta x_4\right) + \frac{m_3}{2}\, g\, \left(\delta x_1 + \delta x_4\right) - \mu\, m_4\, g\, \delta x_4$$

$$\delta W = \left(-m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2}\right) g\, \delta x_1 + \left(-\mu\, m_4 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2}\right) g\, \delta x_4$$

$$\frac{\delta W}{\delta x_1} = \left(-m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2}\right) g \qquad (8)$$

$$\frac{\delta W}{\delta x_4} = \left(-\mu\, m_4 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2}\right) g \qquad (9)$$

Gleichungssystem: (6) … (9) in (4) und (5):

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{J_2}{4\,R^2} + \frac{m_3}{4}\right) \ddot{x}_1 + \left(\frac{m_2}{4} + \frac{J_2}{4\,R^2} - \frac{m_3}{4}\right) \ddot{x}_4 = \left(-m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2}\right) g$$

$$\left(m_4 + \frac{m_2}{4} + \frac{J_2}{4\,R^2} + \frac{m_3}{4}\right) \ddot{x}_4 + \left(\frac{m_2}{4} + \frac{J_2}{4\,R^2} - \frac{m_3}{4}\right) \ddot{x}_1 = \left(-\mu\, m_4 + \frac{m_2}{2} + \frac{m_3}{2}\right) g$$

Einsetzen von Massenträgheitsmoment und Massen in Gleichungssystem:

$$\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \ddot{x}_1 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \ddot{x}_4 = \left(-1 + 2 + 1\right) g$$

$$\left(5 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \ddot{x}_4 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \ddot{x}_1 = \left(-\mu\, 5 + 2 + 1\right) g$$

$$3\, \ddot{x}_1 + \ddot{x}_4 = 2\, g$$

$$\ddot{x}_1 + 7\, \ddot{x}_4 = \left(-5\,\mu + 3\right) g$$

Lösungen des Gleichungssystems:

$$\ddot{x}_1 = \frac{11 + 5\,\mu}{20}\, g$$

$$\ddot{x}_4 = \frac{7 - 15\,\mu}{20}\, g$$

Damit es zum Gleiten der Masse m_4 kommt, muss die Bedingung erfüllt sein:

$$\mu < \frac{7}{15}$$

Restliche Beschleunigungen aus (1) … (3):

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{1 + 5\,\mu}{10}\, g$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = \frac{9 - 5\,\mu}{20}\, g$$