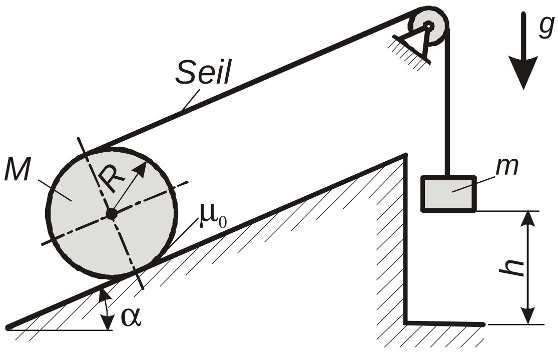


Masseloses undehnbares Seil ist auf Zylinder der Masse M aufgewickelt und über masselose Umlenkrolle mit der Last m verbunden.

Geg.: M, $m = 3/4\, M$, R, h, g, $\alpha = 30°$

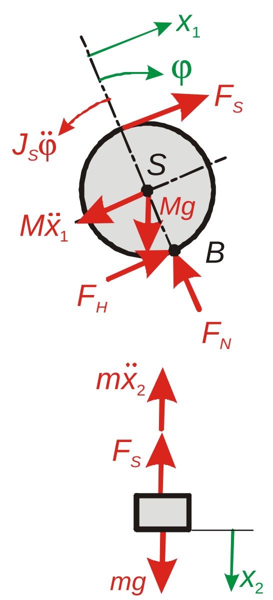
Ges.:
1. Beschleunigung der Masse m bei reinem Rollen des Zylinders
2. Kleinster Haftreibungskoeffizient, damit reines Rollen garantiert ist
3. Zeit, bis die anfänglich ruhende Masse m den Boden erreicht

---

Zu 1.:

Lösung über Prinzip von D'ALEMBERT

Gleichgewichtsbedingungen:



$$\curvearrowleft B: \quad J_S\,\ddot{\varphi} + \left(M\,\ddot{x}_1 + M\,g\,\sin\alpha\right)R - F_S\,2R = 0 \qquad (1)$$

$$\nearrow: \quad F_S - M\,\ddot{x}_1 + F_H - M\,g\,\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$\nwarrow: \quad F_N - M\,g\,\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\uparrow: \quad F_S + m\,\ddot{x}_2 - mg = 0 \qquad (4)$$

Geometrische Bedingungen:

$$x_1 = R\,\varphi \qquad \ddot{x}_1 = R\,\ddot{\varphi} \qquad \ddot{x}_1 = \frac{\ddot{x}_2}{2} \qquad (5)$$

$$x_2 = 2\,x_1 = 2\,R\,\varphi \qquad \ddot{x}_2 = 2\,\ddot{x}_1 = 2\,R\,\ddot{\varphi} \qquad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_2}{2\,R} \qquad (6)$$

Massenträgheitsmoment:

$$J_S = \frac{1}{2}\,M\,R^2 \qquad (7)$$

(4), (5), (6), (7) in (1):

$$\underline{\ddot{x}_2 = \frac{1 - \dfrac{M}{2\,m}\sin\alpha}{1 + \dfrac{3\,M}{8\,m}}\,g = \frac{4}{9}\,g}$$

Zu 2.:

Reibungsgesetz:

$$F_H \le \mu_0\,F_N \qquad (8)$$

(2) und (3):

$$F_H = \left[\left(\frac{m}{M} + \frac{1}{2} \right) \frac{\ddot{x}_2}{g} - \frac{m}{M} + \sin\alpha \right] M\,g = \frac{11}{36} M\,g$$

$$F_N = M\,g\,\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} M\,g$$

in (8):

$$\underline{\mu_0} \geq \frac{F_H}{F_N} = \underline{\frac{11}{54}\sqrt{3} = 0{,}353}$$

Zu 3.:

Integration der Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}_2 = \frac{4}{9} g = konst.$$

$$\dot{x}_2 = \frac{4}{9} g\,t + C_1$$

$$x_2 = \frac{2}{9} g\,t^2 + C_1\,t + C_2$$

Anfangsbedingungen:

$$t = 0: \qquad \dot{x}_2 = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = \frac{4}{9} g\,t$$

$$x_2 = \frac{2}{9} g\,t^2$$

Endbedingung:

$$t = t_E: \qquad x_2 = h$$

$$\underline{t_E = \sqrt{\frac{9}{2}\frac{h}{g}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt{\frac{h}{g}}}$$

Hinweis:
Die Bewegung des Zylinders wurde im Vorstehenden beschrieben als Translation seines Schwerpunktes und Rotation um diesen.
Diese Beschreibung wurde gewählt, um für die 2. Teilaufgabe Normal- und Reibungskraft bereitstellen zu können. (Ähnlich geht man vor, falls bei einer vergleichbaren Bewegung Lagerkräfte gesucht sind).
Braucht man diese für die Lösung der Aufgabe nicht, dann empfiehlt es sich, die Bewegung als Rotation um den Momentanpol (hier Punkt *B*) zu beschreiben.
Die äquivalenten Gleichungen (1) und (7) lauten dann:

$$\curvearrowleft B: \quad J_B\,\ddot{\varphi} + M\,g\,\sin\alpha\,R - F_S\,2\,R = 0 \qquad (1')$$

$$J_B = J_S + M\,R^2 = \frac{3}{2} M\,R^2. \qquad (7')$$

Damit kommt man schnell auf:

$$\frac{3}{2} M\, R^2\, \ddot{\varphi} + M\, g\, \sin\alpha\, R - F_S\, 2\, R = 0 \quad .$$

Und mit (4) und (6) auf das gleiche Ergebnis für die gesuchte Beschleunigung:

$$\left(\frac{3}{4} M + 2\, m\right) \ddot{x}_2 + \left(-2\, m + M\, \sin\alpha\right) g = 0$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{2\, m - M\, \sin\alpha}{2\, m + \frac{3}{4} M}\, g \qquad .$$