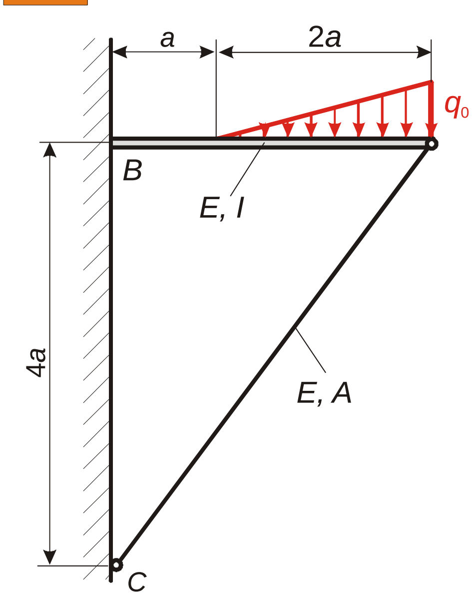
F 8



Geg.: q_0, a, I, A, (E)

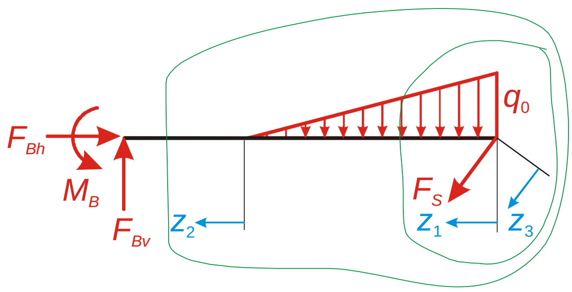
Ges.:
1. Lagerreaktionen, Stabkraft
2. Schnittgrößenverläufe (mit graf. Darstellung) für $A\,a^2 = 3\,I$
3. Diskussion der Fälle:
   a) $A \to 0$
   b) $\dfrac{I}{A\,a^2} \to 0$

Zu 1.:

$$\uparrow: \quad F_{Bv} - F_S\,\frac{4}{5} - q_0\,2\,a\,\frac{1}{2} = 0$$

$$\to: \quad F_{Bh} - F_S\,\frac{3}{5} = 0$$

$$\curvearrowleft B: \quad M_B - F_S\,\frac{4}{5}\,3\,a - q_0\,a\left(a + \frac{2}{3}\,2\,a\right) = 0$$



Problem statisch unbestimmt

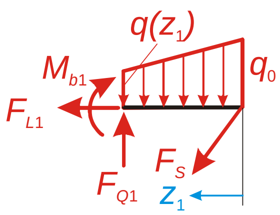
Lösung über Satz von CASTIGLIANO: F_S - statisch Unbestimmte

$$\frac{\partial U}{\partial F_S} = 0 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2a} M_{b1}\,\frac{\partial M_{b1}}{\partial F_S}\,dz_1 + \int_0^{a} M_{b2}\,\frac{\partial M_{b2}}{\partial F_S}\,dz_2\right] + \frac{1}{EA}\int_0^{5a} F_{L3}\,\frac{\partial F_{L3}}{\partial F_S}\,dz_3 \qquad \Big|\cdot E$$

1. Bereich $\quad 0 \le z_1 \le 2a$:

$$\frac{q_1(z_1)}{q_0} = \frac{2\,a - z_1}{2\,a} = 1 - \frac{z_1}{2\,a}$$

$$q_1(z_1) = \left(1 - \frac{z_1}{2\,a}\right) q_0$$

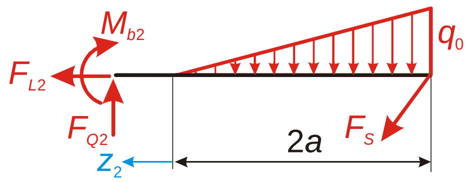


$$M_{b1} = -\frac{4}{5}\,F_S\,z_1 - \frac{q_1(z_1)\,z_1^2}{2} - \frac{[q_0 - q_1(z_1)]\,z_1}{2}\,\frac{2}{3}\,z_1$$

$$= -\frac{4}{5}\,F_S\,z_1 - \left(1 - \frac{z_1}{2\,a}\right)\frac{q_0\,z_1^2}{2} - \frac{q_0\,z_1^3}{6\,a} = -\frac{4}{5}\,F_S\,z_1 - \frac{q_0\,z_1^2}{2} + \frac{q_0\,z_1^3}{12\,a}$$

$$\frac{\partial M_{b1}}{\partial F_S} = -\frac{4}{5}\,z_1$$

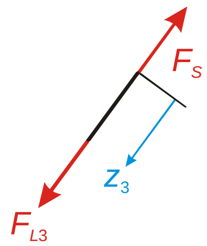
2. Bereich $\quad 0 \le z_2 \le a$:



$$M_{b2} = -\frac{4}{5} F_S \left(2\,a + z_2\right) - q_0\, a \left(\frac{4}{3}\, a + z_2\right)$$

$$\frac{\partial M_{b2}}{\partial F_S} = -\frac{4}{5}\left(2\,a + z_2\right)$$

3. Bereich $\quad 0 \le z_3 \le 5\,a$:



$$F_{L3} = F_S$$

$$\frac{\partial F_{L3}}{\partial F_S} = 1$$

$$0 = \frac{1}{I}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2a} \left(-\frac{4}{5} F_S\, z_1 - \frac{q_0\, z_1^2}{2} + \frac{q_0\, z_1^3}{12\,a}\right)\left(-\frac{4}{5}\, z_1\right) dz_1 \\ \displaystyle + \int_0^{a} \left[-\frac{4}{5} F_S \left(2\,a + z_2\right) - q_0\, a \left(\frac{4}{3}\, a + z_2\right)\right]\left(-\frac{4}{5}\left(2\,a + z_2\right)\right) dz_2 \end{array}\right\} + \frac{F_S\, 5\,a}{A}$$

$$0 = \frac{a^2}{I}\left(\frac{432}{75} F_S + \frac{368}{75} q_0\, a\right) + \frac{F_S\, 5}{A}$$

$$\underline{F_S = -\frac{368}{432 + \dfrac{375\, I}{A\, a^2}}\, q_0\, a = -0{,}661\, q_0\, a}$$

$$\underline{F_{Bv}} = \frac{4}{5} F_S + q_0\, a = \underline{\frac{688 + \dfrac{1875\, I}{A\, a^2}}{2160 + \dfrac{1875\, I}{A\, a^2}}\, q_0\, a = 0{,}471\, q_0\, a}$$

$$\underline{F_{Bh}} = \frac{3}{5} F_S = \underline{-\frac{3}{5}\,\frac{368}{432 + \dfrac{375\, I}{A\, a^2}}\, q_0\, a = -0{,}396\, q_0\, a}$$

$$\underline{M_B} = \frac{12}{5} F_S\, a + \frac{7}{3} q_0\, a^2 = \underline{\frac{624 + \dfrac{4375\, I}{A\, a^2}}{2160 + \dfrac{1875\, I}{A\, a^2}}\, q_0\, a^2 = 0{,}748\, q_0\, a^2}$$

Zu 2.:
(Freischnitte und allgemeiner M_b-Verlauf s. o.)

$$F_{L1} = -\frac{3}{5} F_S = -0{,}396\, q_0\, a$$

$$F_{Q1} = \frac{4}{5} F_S + \left(1 - \frac{z_1}{4\,a}\right) q_0\, z_1 = \left[-0{,}529 + \frac{z_1}{a} - 0{,}250 \left(\frac{z_1}{a}\right)^2\right] q_0\, a$$

$$M_{b1} = -\frac{4}{5} F_S\, z_1 - \frac{q_0\, z_1^2}{2} + \frac{q_0\, z_1^3}{12\,a} = \left[0{,}529 \frac{z_1}{a} - 0{,}500 \left(\frac{z_1}{a}\right)^2 + 0{,}083 \left(\frac{z_1}{a}\right)^3\right] q_0\, a^2$$

$$F_{L2} = -\frac{3}{5} F_S = -0{,}396\, q_0\, a$$

$$F_{Q2} = \frac{4}{5} F_S + q_0\, a = 0{,}471 q_0\, a$$

$$M_{b2} = -\frac{4}{5} F_S\, (2\,a + z_2) - q_0\, a \left(\frac{4}{3} a + z_2\right) = \left(0{,}352 - 0{,}471 \frac{z_2}{a}\right) q_0\, a^2$$

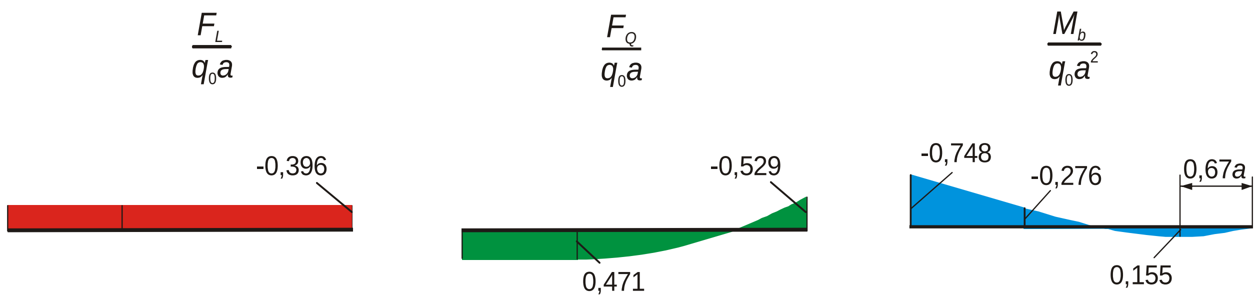
$$F_{Q1}(0) = -0{,}529\, q_0\, a$$

$$F_{Q1}(2a) = 0{,}471 q_0\, a$$

$$M_{b1}(2a) = -0{,}276\, q_0\, a^2$$

$$F_{Q2}(a) = 0{,}471 q_0\, a$$

$$M_{b2}(a) = -0{,}748\, q_0\, a^2$$



Zu 3.:

Fall a)

$A \to 0$:

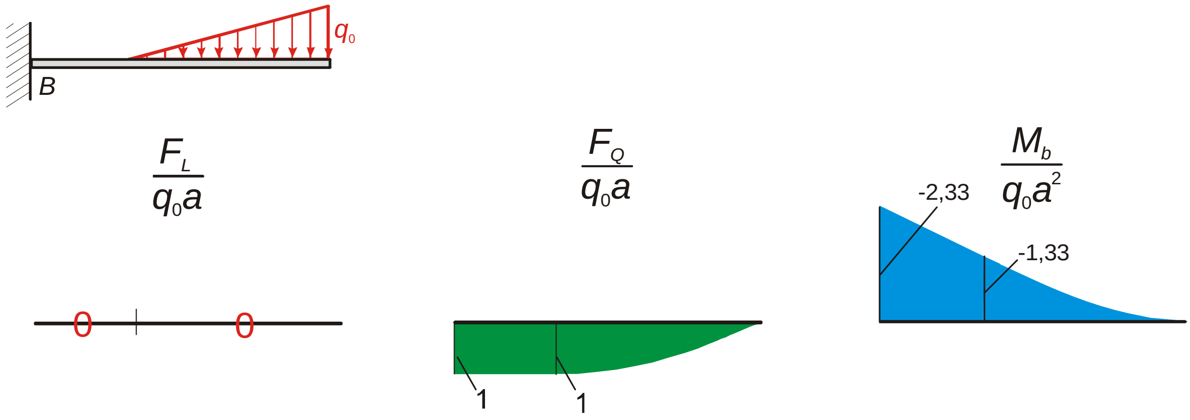
$$\underline{F_S = 0}$$

$$\underline{F_{Bv} = q_0\, a}$$

$$\underline{F_{Bh} = 0}$$

$$\underline{M_B = \frac{7}{3} q_0\, a^2 = 2{,}33\, q_0\, a^2}$$

Wenn die Querschnittsfläche des Stabes gegen null geht, bedeutet das, dass der Stab sein Trageeigenschaften verliert. Dieser Fall ist identisch mit dem in Aufgabe …



Man vergleiche besonders die Schnittgrößenverläufe! Das maximale Moment beträgt bei der statisch unbestimmten Aufgabe nur noch ca. ein Drittel des Maximalwertes bei der statisch bestimmten Aufgabe. Bei gleicher Geometrie des Balkens stellen sich damit die Biegespannungen im gleichen Verhältnis ein.

Fall b)

$A \to \infty:$

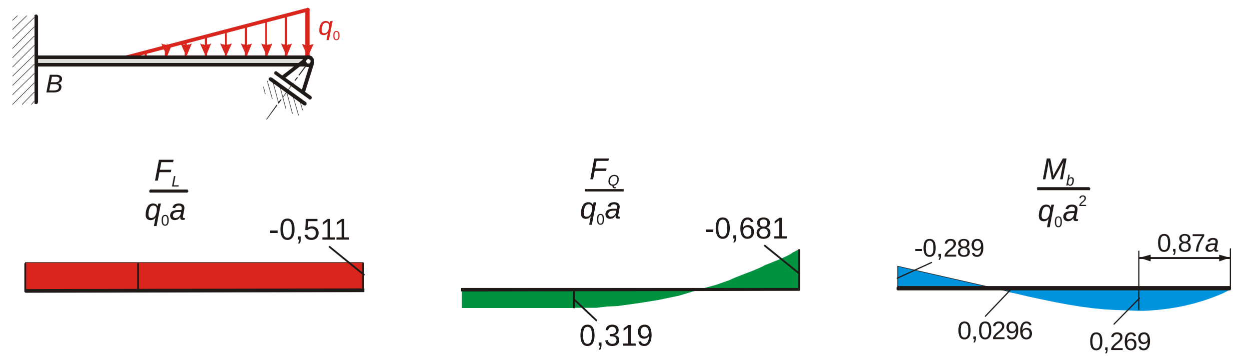
$$F_S = -\frac{23}{27}\, q_0\, a = -0{,}852\, q_0\, a$$

$$F_{Bv} = \frac{43}{135}\, q_0\, a = 0{,}319\, q_0\, a$$

$$F_{Bh} = -\frac{23}{45}\, q_0\, a = -0{,}511\, q_0\, a$$

$$M_B = \frac{13}{45}\, q_0\, a^2 = 0{,}289\, q_0\, a^2$$

In diesem Fall wird der Stab zum Gleitlager mit der Gleitebene senkrecht zur Stabachse.



Das maximale Moment fällt gegenüber der ursprünglichen Aufgabenstellung auf weniger als 40 Prozent.