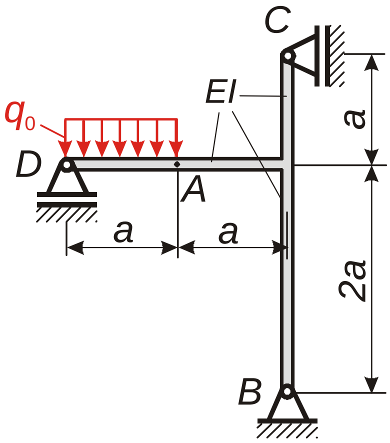
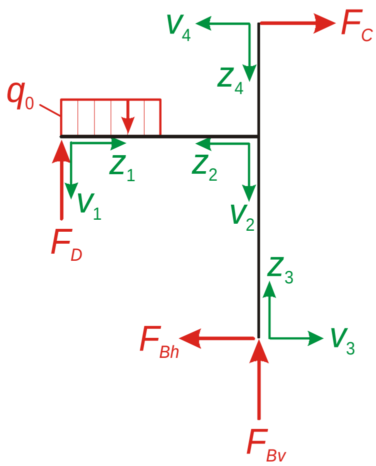


Geg.: EI = konst., q_0, a

Ges.: 1. Lagerreaktionen
2. Durchbiegung v_A des Balkens an der Stelle A

Anm.: Lösung mittels Biegelinie



Gleichgewichtsbedingungen

$$\rightarrow: \quad -F_{Bh} + F_C = 0$$

$$\uparrow: \quad F_{Bv} + F_D - q_0\, a = 0$$

$$\curvearrowleft B: \quad -F_C\, 3a - F_D\, 2a + q_0\, a\, \frac{3}{2}\, a = 0$$

DGL der elastischen Linie

$$EI\, v_i'' = -M_{bi} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Schnittmomente

$$M_{b1} = F_D\, z_1 - \frac{q_0}{2}\, z_1^2$$

$$M_{b2} = -F_C\, a - F_{Bh}\, 2a + F_{Bv}\, z_2$$

$$M_{b3} = F_{Bh}\, z_3$$

$$M_{b4} = F_C\, z_4$$

Integration der DGLn

$$EI\, v_1'' = -M_{b1} = -F_D\, z_1 + \frac{q_0}{2}\, z_1^2$$

$$EI\, v_1' = -F_D\, \frac{z_1^2}{2} + \frac{q_0}{6}\, z_1^3 + C_1$$

$$EI\, v_1 = -F_D\, \frac{z_1^3}{6} + \frac{q_0}{24}\, z_1^4 + C_1\, z_1 + C_2$$

$$EI\, v_2'' = -M_{b2} = \left(F_C + 2F_{Bh}\right) a - F_{Bv}\, z_2$$

$$EI\, v_2' = \left(F_C + 2F_{Bh}\right) a\, z_2 - F_{Bv}\, \frac{z_2^2}{2} + C_3$$

$$EI\, v_2 = \left(F_C + 2F_{Bh}\right) a\, \frac{z_2^2}{2} - F_{Bv}\, \frac{z_2^3}{6} + C_3\, z_2 + C_4$$

$$EI\, v_3'' = -M_{b3} = -F_{Bh}\, z_3$$

$$EI\, v_3' = -\frac{F_{Bh}}{2}\, z_3^2 + C_5$$

$$EI\, v_3 = -\frac{F_{Bh}}{6}\, z_3^3 + C_5\, z_3 + C_6$$

$$EI\, v_4'' = -M_{b4} = -F_C\, z_4$$

$$EI\, v_4' = -\frac{F_C}{2}\, z_4^2 + C_7$$

$$EI\, v_4 = -\frac{F_C}{6}\, z_4^3 + C_7\, z_4 + C_8$$

Randbedingungen

$v_1(a) = v_2(a)$ $\qquad -F_D \dfrac{a^3}{6} + \dfrac{q_0}{24} a^4 + C_1\, a + C_2 = \left(F_C + 2\, F_{Bh}\right) \dfrac{a^3}{2} - F_{Bv} \dfrac{a^3}{6} + C_3\, a + C_4$ (1)

$v_1'(a) = -v_2'(a)$ $\qquad -F_D \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{q_0}{6} a^3 + C_1 = -\left(F_C + 2\, F_{Bh}\right) a^2 + F_{Bv} \dfrac{a^2}{2} - C_3$ (2)

$v_1(0) = 0$ $\qquad C_2 = 0$

$v_2(0) = 0$ $\qquad C_4 = 0$

$v_3(0) = 0$ $\qquad C_6 = 0$

$v_4(0) = 0$ $\qquad C_8 = 0$

$v_4(a) = -v_3(2\, a)$ $\qquad -\dfrac{F_C}{6} a^3 + C_7\, a + C_8 = \dfrac{4}{3} F_{Bh}\, a^3 - 2\, C_5\, a - C_6$ (3)

$v_2'(0) = -v_3'(2\, a)$ $\qquad C_3 = 2\, F_{Bh}\, a^2 - C_5$ (4)

$v_2'(0) = -v_4'\, a)$ $\qquad C_3 = \dfrac{F_C}{2} a^2 - C_7$ (5)

Als statisch Unbestimmte wird F_D gewählt. Damit lassen sich alle anderen Lagerreaktionen über die Gleichgewichtsbedingungen durch F_D ausdrücken:

$$F_{Bv} = q_0\, a - F_D$$

$$F_{Bh} = F_C = \frac{1}{2} q_0\, a - \frac{2}{3} F_D$$

Damit Gleichungssystem aus den Randbedingungen

$$C_1 - C_3 = \left(\frac{13}{24} q_0\, a - \frac{2}{3} F_D\right) a^2 \qquad (1')$$

$$C_1 + C_3 = \left(-\frac{7}{6} q_0\, a + 2\, F_D\right) a^2 \qquad (2')$$

$$2\, C_5 + C_7 = \left(\frac{3}{4} q_0\, a - F_D\right) a^2 \qquad (3')$$

$$C_3 + C_5 = \left(q_0\, a - \frac{4}{3} F_D\right) a^2 \qquad (4')$$

$$C_3 + C_7 = \left(\frac{1}{4} q_0\, a - \frac{1}{3} F_D\right) a^2 \qquad (5')$$

Lösung des Gleichungssystems

(4') – (5'): $\qquad C_5 - C_7 = \left(\dfrac{3}{4} q_0\, a - F_D\right) a^2 \qquad (4'')$

(3') + (4''): $\qquad C_5 = \left(\dfrac{1}{2} q_0\, a - \dfrac{2}{3} F_D\right) a^2$

$$C_7 = \left(-\frac{1}{4} q_0\, a - \frac{1}{3} F_D\right) a^2$$

C_5 in (4'): $\qquad C_3 = \left(\dfrac{1}{2} q_0\, a - \dfrac{2}{3} F_D\right) a^2$

C_3 in (2'): $$C_1 = \left(-\frac{5}{3} q_0\, a + \frac{8}{3} F_D\right) a^2$$

C_1 und C_3 in (1'): $$\underline{F_D = \frac{65}{96} q_0\, a = 0,677\, q_0\, a}$$

Restliche Lagerreaktionen

$$\underline{F_{Bv} = \frac{31}{96} q_0\, a = 0,323\, q_0\, a}$$

$$\underline{F_{Bh} = F_C = \frac{7}{144} q_0\, a = 0,049\, q_0\, a}$$

Restliche Integrationskonstanten

$$C_1 = \frac{5}{36} q_0\, a^3$$

$$C_3 = \frac{7}{144} q_0\, a^3$$

$$C_5 = \frac{7}{144} q_0\, a^3$$

$$C_7 = -\frac{7}{288} q_0\, a^3$$

Biegelinien

$$\underline{v_1 = \frac{q_0}{EI}\left(\frac{1}{24} z_1^4 - \frac{65}{576} a\, z_1^3 + \frac{5}{36} a^3\, z_1\right)}$$

$$\underline{v_2 = \frac{q_0}{EI}\left(-\frac{31}{576} a\, z_2^3 + \frac{21}{288} a^2\, z_2^2 + \frac{7}{144} a^3\, z_2\right)}$$

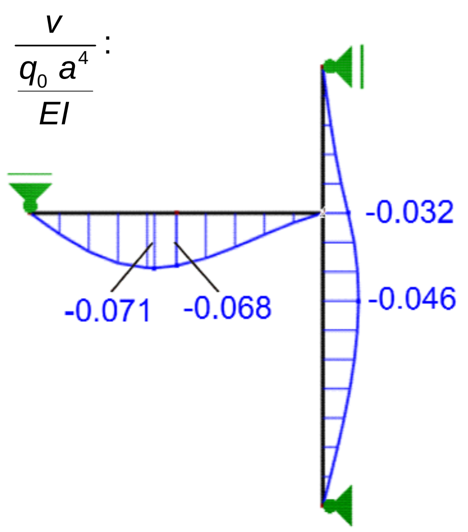
$$\underline{v_3 = \frac{q_0}{EI}\left(-\frac{7}{864} a\, z_3^3 + \frac{7}{144} a^3\, z_3\right)}$$

$$\underline{v_4 = \frac{q_0}{EI}\left(-\frac{7}{864} a\, z_4^3 - \frac{7}{288} a^3\, z_4\right)}$$

Verschiebung des Punktes *A*

$$\underline{v_A = v_1(a) = v_2(a) = \frac{13}{192} \frac{q_0\, a^4}{EI} = 0,0677 \frac{q_0\, a^4}{EI}}$$

Zur Illustration des Ergebnisses ist das Ergebnisplot für die Verschiebung nach der Berechnung des Problems mit dem Programm RSTAB der Firma Dlubal GmbH angefügt.



(Wenn Sie mehr über die Programme der Fa. Dlubal erfahren wollen, dann schauen Sie bitte hier oder direkt auf der Homepage der Firma.)

Anm.:
Da hier neben den Lagerreaktionen nur eine diskrete Durchbiegung gefordert ist, ist über die DGL der Biegelinie praktisch „zu viel“ (Durchbiegung an jeder Stelle des Balkens) berechnet worden. Effektiver lassen sich die geforderten Werte über den Satz von CASTIGLIANO ermitteln (s. separate Aufgabe).

Aus pädagogischen Gründen wurde diese Aufgabe sowohl über die DGL der Biegelinie als auch über den Satz von CASTIGLIANO (s. separate Aufgabe) gerechnet. Anliegen war, Leistungsfähigkeit und Aufwand beider Lösungsverfahren vergleichbar zu machen.