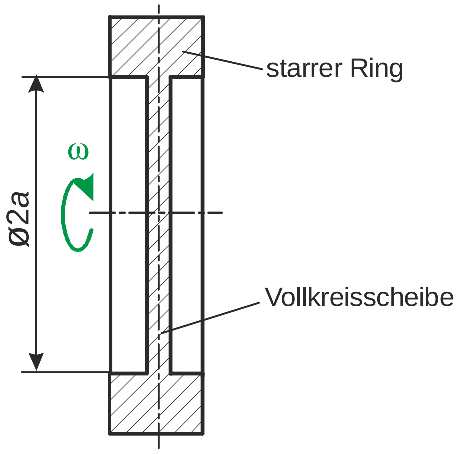


Geg.: Außenradius der Scheibe a
Winkelgeschwindigkeit ω
Elastizitätsmodul E
Querkontraktionszahl $\nu = 0{,}3$
Dichte ρ

Ges.:
1. Verlauf der Radialverschiebung
2. Größte Radialverschiebung (Ort und Größe)
3. Spannungsverläufe σ_r und σ_φ
4. Größte Hauptspannung (Ort und Größe)
5. Vergleichsspannung nach Gestaltänderungsenergiehypothese

Anm.: Lagerung (nicht dargestellt) erfolgt so, dass nur Rotation um Symmetrieachse und Translation in radialer Richtung möglich sind.

Radialverschiebung und 1. Ableitung

$$u_r = C_1\, r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,r^3$$

$$u_r' = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - 3\,\frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,r^2$$

Spannungen

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\nu}{r}\,u_r + u_r'\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(1+\nu)\,C_1 - \frac{C_2}{r^2}\,(1-\nu) - (3+\nu)\,\frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,r^2\right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\,u_r + \nu\,u_r'\right) = \frac{E}{1-\nu^2}\left[(1+\nu)\,C_1 + \frac{C_2}{r^2}\,(1-\nu) - (1+3\,\nu)\,\frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,r^2\right]$$

Randbedingungen, Konstanten

$$u_r(r=0) = 0 \quad\rightarrow\quad C_2 = 0$$

$$u_r(r=a) = 0 \quad\rightarrow\quad C_1\,a - \frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,a^3 = 0 \qquad C_1 = \frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,a^2$$

Verschiebungsverlauf

$$u_r = \frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,a^3\,\frac{r}{a}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$u_r' = \frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,a^2\left(1-3\,\frac{r^2}{a^2}\right)$$

maximale Verschiebung

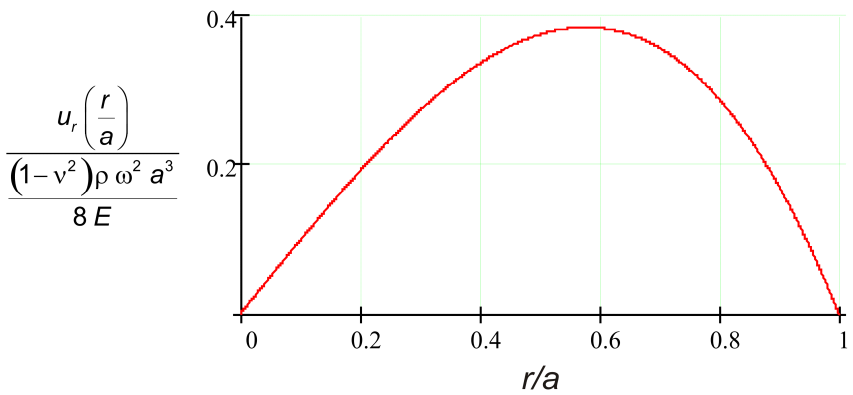
$$u_r' = \frac{1-\nu^2}{8\,E}\,\rho\,\omega^2\,a^2\left(1-3\,\frac{r^2}{a^2}\right)=0$$

$$\frac{r^2}{a^2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{r}{a}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}=\pm 0{,}577 \qquad \text{(negativer Wert nur mathematische Bedeutung)}$$

$$\underline{u_{r\,\max}=\frac{\sqrt{3}}{36}\left(1-\nu^2\right)\frac{\rho\,\omega^2\,a^3}{E}=0{,}385\left(1-\nu^2\right)\frac{\rho\,\omega^2\,a^3}{8\,E}}$$

Grafische Darstellung



Spannungen

$$\underline{\sigma_r=\frac{1}{8}\left[1+\nu-(3+\nu)\,\frac{r^2}{a^2}\right]\rho\,\omega^2\,a^2}$$

$$\underline{\sigma_\varphi=\frac{1}{8}\left[1+\nu-(1+3\,\nu)\,\frac{r^2}{a^2}\right]\rho\,\omega^2\,a^2}$$

Die Funktionen der Spannungen sind Parabeln zweiter Ordnung mit den Scheiteln bei $r = 0$. Extremwerte der Spannungen sind daher nur an den Rändern $r = 0$ und $r = a$ möglich:

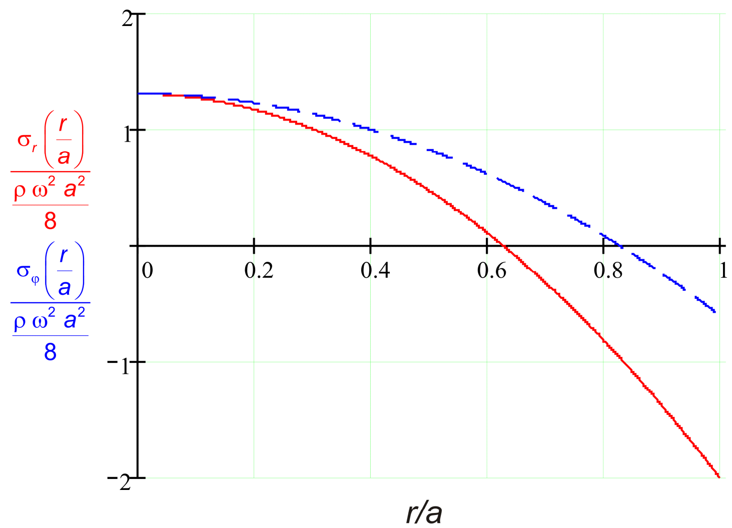
$$\sigma_r(r=0)=\frac{1+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2\,a^2$$

$$\sigma_r(r=a)=-\frac{1}{4}\,\rho\,\omega^2\,a^2$$

$$\sigma_\varphi(r=0)=\frac{1+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2\,a^2=\sigma_r(r=0)$$

$$\sigma_\varphi(r=a)=-\frac{\nu}{4}\,\rho\,\omega^2\,a^2$$

Grafische Darstellung (für ν = 0,3)



Größte Hauptspannung
Die Spannungen σ_r und σ_φ sind Hauptspannungen, da wegen der Rotationssymmetrie des Problems keine Schubspannungen auftreten.
Es lässt sich beweisen, dass in jedem Punkt gilt: $\sigma_\varphi \ge \sigma_r$

$$\frac{1}{8}\left[1+\nu-(1+3\,\nu)\,\frac{r^2}{a^2}\right]\rho\,\omega^2\,a^2 \ge \frac{1}{8}\left[1+\nu-(3+\nu)\,\frac{r^2}{a^2}\right]\rho\,\omega^2\,a^2$$

$$-(1+3\,\nu)\,\frac{r^2}{a^2} \ge -(3+\nu)\,\frac{r^2}{a^2}$$

1. Fall: $r = 0:\quad \sigma_\varphi = \sigma_r$

2. Fall: $r \ne 0:\quad \sigma_\varphi > \sigma_r$

$$-(1+3\,\nu)\,\frac{r^2}{a^2} > -(3+\nu)\,\frac{r^2}{a^2}$$

$$1+3\,\nu < 3+\nu$$

$$\nu < 1 \qquad \text{q.d.e.}$$

Damit ist die größte Hauptspannung in der Scheibe:

$$\underline{\sigma_\varphi(r=0) = \sigma_r(r=0) = \frac{1+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2\,a^2}$$

Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsenergiehypothese

$$\sigma_{v3} = \sqrt{\sigma_r^2+\sigma_\varphi^2-\sigma_r\,\sigma_\varphi}$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{\left[(1+\nu)-(3+\nu)\,\frac{r^2}{a^2}\right]^2+\left[(1+\nu)-(1+3\,\nu)\,\frac{r^2}{a^2}\right]^2 -\left[(1+\nu)-(3+\nu)\,\frac{r^2}{a^2}\right]\left[(1+\nu)-(1+3\,\nu)\,\frac{r^2}{a^2}\right]}\;\rho\,\omega^2\,a^2$$

$$\sigma_{v3} = \frac{1}{8}\sqrt{(1+\nu)^2 - 4\,(1+\nu)^2\,\frac{r^2}{a^2} + \left(7 + 2\,\nu + 7\,\nu^2\right)\frac{r^4}{a^4}}\;\rho\,\omega^2\,a^2$$

$$\sigma_{v3}(r = 0) = \frac{1+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2\,a^2$$

$$\sigma_{v3}(r = a) = \frac{1}{4}\sqrt{\left(1 - \nu + \nu^2\right)}\;\rho\,\omega^2\,a^2 = \sigma_{v3\,\max}$$