Anhang

[1/0] Partielle Ableitungen in Kommaschreibweise
z. B.:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} = (\ )_{,x} \qquad \frac{\partial(\ )}{\partial y} = (\ )_{,y}$$

[1/1] EINSTEINsche Summationskonvention
Enthält ein Ausdruck (z. B. Produkt) zwei gleiche Indizes, so ist über diese zu summieren. Summationsindizes sind hier meistens: x, y, z. Diese Festlegung führt zu schlankeren und übersichtlicheren Gleichungen (beinhaltet aber auch die Gefahr, die Summation zu unterlassen).
z. B.:

$$t_{kl,k} = 0 \qquad \text{mit:} \quad (k,l) = \{x, y, z\}$$
$$t_{xx,x} + t_{yx,y} + t_{zx,z} = 0$$

[1/2] Trigonometrische Beziehungen für doppelte Argumente

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \qquad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$$
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$$

[1/3] Permutationssymbol
Definition:

$$\in_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i,j,k \text{ in zyklischer Reihenfolge} \\ -1 & \text{für } i,j,k \text{ in antizyklischer Reihenfolge} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

[1/4] KRONECKERsymbol
Definition:

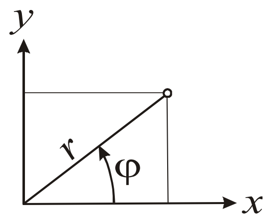
$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

[2/1] LAPLACE-Operator

$$\Delta(\,) = (\,)_{,xx} + (\,)_{,yy} \qquad \text{mit:} \quad (k,l) = \{x, y\}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad \text{mit:} \quad (k,l) = \{r, \varphi\}$$

[2/2] Transformationsbeziehungen zwischen kartesischen (x, y) und Polarkoordinaten (r, φ):



$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

bzw.

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x} \quad ,$$

partielle Ableitungen:

$$2\,r\,r_{,x} = 2\,x \qquad r_{,x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi$$

$$2\,r\,r_{,y} = 2\,y \qquad r_{,y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi$$

$$\varphi_{,x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\varphi_{,y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r} \quad .$$

[2/3] Lösung der Differentialgleichung $f_{k,yyyy} - 2\,\alpha_k^2\,f_{k,yy} + \alpha_k^4\,f_k = 0$:

Ansatz:

$$f_k(y) = \sum_{i=1}^{4} K_{k\,i}\,e^{\lambda_i y}$$

$$\text{mit:} \quad f_{k\,i,y} = \lambda_i\,e^{\lambda_i y}$$

$$f_{k\,i,yy} = \lambda_i^2\,e^{\lambda_i y}$$

$$f_{k\,i,yyy} = \lambda_i^3\,e^{\lambda_i y}$$

$$f_{k\,i,yyyy} = \lambda_i^4\,e^{\lambda_i y}$$

Einsetzen in Dgl. liefert charakteristische Gleichung:

$$\left(\lambda_i^4 - 2\,\alpha_k^2\,\lambda_i^2 + \alpha_k^4\right)e^{\lambda_i y} = 0$$

mit den Lösungen:

$$\lambda_i^4 - 2\,\alpha_k^2\,\lambda_i^2 + \alpha_k^4 = 0$$

$$\lambda_i^2 = u: \qquad \lambda_i = \pm\sqrt{u} \qquad (u > 0)$$

$$u^2 - 2\,\alpha_k^2\,u + \alpha_k^4 = 0$$

$$u_{1,2} = \alpha_k^2 \pm \sqrt{\alpha_k^4 - \alpha_k^4} = \alpha_k^2$$

$$\underline{\lambda_1 = \alpha_k}$$
$$\underline{\lambda_2 = \alpha_k}$$
$$\underline{\lambda_3 = -\alpha_k}$$
$$\underline{\lambda_4 = -\alpha_k}$$

Allgemeine Lösung der Dgl.:

$$f_k(y) = K_{k1}\, e^{\alpha_k y} + K_{k2}\, \alpha_k y\, e^{\alpha_k y} + K_{k3}\, e^{-\alpha_k y} + K_{k4}\, \alpha_k y\, e^{-\alpha_k y}$$

Ersetzen der e-Funktionen durch Hyperbelfunktionen gemäß:

$$\sinh \alpha_k y = \frac{e^{\alpha_k y} - e^{-\alpha_k y}}{2}$$
$$\cosh \alpha_k y = \frac{e^{\alpha_k y} + e^{-\alpha_k y}}{2}$$

Neue Formulierung der allgemeinen Lösung der Dgl.:

$$f_k(y) = A_k \cosh \alpha_k y + B_k \sinh \alpha_k y + C_k\, \alpha_k y \cosh \alpha_k y + D_k\, \alpha_k y \sinh \alpha_k y$$

[2/4] FOURIER-Reihe (einer periodischen Funktion)

Periodizität: $f(x + k\,T) = f(x)$ $\qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos \frac{n\,2\,\pi\,x}{T} + b_n \sin \frac{n\,2\,\pi\,x}{T} \right)$$ $\qquad T$ Periodenlänge

mit: $\quad a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} y(x)\, dx$ $\qquad y(x)$ zu analysierende Funktion

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} y(x) \cos \frac{n\,2\,\pi\,x}{T}\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{(T)} y(x) \sin \frac{n\,2\,\pi\,x}{T}\, dx$$

[2/5] Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen

$$\sin\left(x_1 \pm x_2\right) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$$
$$\cos\left(x_1 \pm x_2\right) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \qquad \mathrm{n}\, x_2$$

[2/6] EULERscher Satz (EULER, Leonhard 1707 – 1783)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$